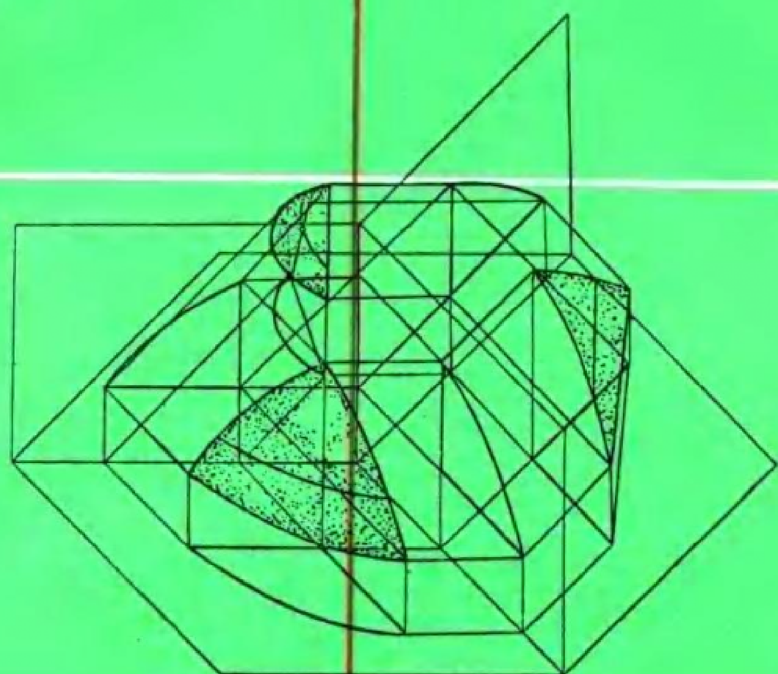
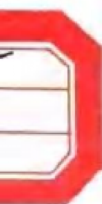
朱辉　程祖衍
编著

多维画法几何学



DUOWEI
HUAFA
JIHEXUE



机械工业出版社

多维画法几何学

朱 辉 程祖衍 编著



机 械 工 业 出 版 社

本书是一本研究多变量图示、解图问题的专著。全书系统地阐述多维几何学的基本概念与理论；详细地论述蒙日体系中几何元素图示和图解的理论和方法；介绍多维空间中各具有图示特点的多种投影体系和作图方法，以及多维画法几何在物理、化学、冶金、曲面设计、多目标优化、线性规划等方面的具体应用。

本书可作为工程图学专业的学生、研究生的教材，也可作为广大工程技术人员、科学工作者、高等院校师生的参考书。

多维画法几何学

朱 辉 程祖衍 编著

*

责任编辑：王正琼

封面设计：郭景云

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 11 3/4·字数 282 千字

1988 年 2 月北京第一版·1988 年 2 月北京第一次印刷

印数 0,001—3,130·定价：3.20 元

*

ISBN 7-111-00372-1/O·12

前　言

多维画法几何学是多维几何学与画法几何学相结合的一门学科，它是以图形来研究多变量图示与图解问题。这门学科从产生以来，已经过了相当长的发展时期，但在近期才取得了较大的进展。我国从八十年代初期开始对这门学科进行深入的研究，在科学技术中的应用也逐渐得到重视，并取得了可喜的进展。1982年，作者受中国工程图学学会的委托，在上海举办了两期多维画法几何讨论班。随后，专门举行了多维画法几何专题研究会，并在全国与地方学会年会上以及有关刊物上陆续发展了大量论文。本书就是以作者在上述讨论班的讲座教材为基础，并综合了一些最新研究成果编写而成的。

本书由朱辉编写第一、二、三、四、九、十、十一、十二各章，程祖衍编写第五、六、七、八、十三、十四、十五、十六各章。

本书编写过程中曾得到前中国工程图学学会理论图学专业委员会主任委员莫善祥教授的鼓励与支持。作者对张九垣教授、厉声林教授以及所有关怀本书编写工作的同志表示衷心感谢。此外，钱毅同志曾对本书的一些章节提出了许多宝贵意见，王继成同志帮助绘制了部分插图，金彬彬同志帮助整理了部分文稿，陆逸影同志描绘了全书插图。在此谨致谢意。

朱　辉　程祖衍

1984年10月于上海

符　　号

符号	含义
π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6	投影面（坐标面）
Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4	投影空间（坐标空间）
x、y、z、u	投影轴（坐标轴）
S^n	n维空间
S^p	p维子空间
A、B、C、D	空间点
x_A、y_A、z_A、u_A	空间点A的坐标值
A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6	空间点A在投影面上的投影
$(A)_1$、$(A)_2$、$(A)_3$、$(A)_4$	空间点A在投影空间中的投影
a、b、c、l、m、n	空间直线
a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6	空间直线a在投影面上的投影
$(a)_1$、$(a)_2$、$(a)_3$、$(a)_4$	空间直线a在投影空间中的投影
α、β、γ	空间平面
α_1、α_2、α_3、α_4、α_5、α_6	空间平面α在投影面上的投影
$(\alpha)_1$、$(\alpha)_2$、$(\alpha)_3$、$(\alpha)_4$	空间平面α在投影空间中的投影
T、Λ、Ω	超平面（三维空间）
τ_1、τ_2、τ_3、τ_4、τ_5、τ_6	超平面T在投影面上的迹线
HRL	水平基线
VRL	垂直基线
A_{ij}	投影变换后点A的新投影 i为原投影的下标 j为被变换的次数
$/\!/$	平行
/·/	半平行
$\perp$	垂直
$\veebar$	绝对垂直
⋌	相交
═	相交结果
$\equiv$	重合
d_i	关联度
d_r	垂直度（正交度）
d_p	平行度

目　录

第一篇　多维几何学导论

第一章　多维空间的基本知识 ……1
第一节　多维空间的直角坐标与子空间 ……1
第二节　多维图形 ……2
第三节　自由度与对偶性 ……5
第四节　四维空间的直角坐标体系与几何模型 ……6
第五节　四维空间中的各类几何元素 ……8
第二章　多维空间中几何元素的相对位置与度量问题 ……13
第一节　多维空间中的关联问题 ……13
第二节　多维空间中的垂直问题 ……16
第三节　多维空间中的平行问题 ……35
第四节　多维空间中的距离与角度 ……44
第三章　多维空间中的投影 ……49
第一节　多维空间中的中心投影与平行投影 ……49
第二节　四维空间中的轴测投影 ……50
第三节　四维空间中的正投影 ……51

第二篇　蒙日体系中的多维画法几何学

第四章　几何元素的图示法 ……54
第一节　四维空间中点的图示法 ……54
第二节　四维空间中直线的图示法 ……55
第三节　四维空间中平面的图示法 ……58
第四节　四维空间中超平面的图示法 ……61
第五节　高于四维空间中的几何元素图示法 ……64
第六节　四维点中心投影中的几何元素图示法 ……65
第七节　四维线中心投影的几何元素图示法 ……68
第五章　四维空间中几何元素间的相对位置 ……71
第一节　相交问题 ……71
第二节　从属问题 ……77
第三节　平行问题 ……78
第四节　垂直问题 ……80
第五节　综合问题分析 ……86
第六章　投影空间的变换及其应用 ……89
第一节　基本概念和方法 ……89
第二节　直线的投影变换 ……91
第三节　平面的投影变换 ……93
第四节　超平面的投影变换 ……97
第五节　变换投影空间在度量问题中的应用 ……99
第七章　几何元素的旋转 ……104

第一节　几何元素绕直线旋转……106
第二节　几何元素绕平面旋转……107
第八章　曲线、曲面、超曲面……112
第一节　曲线……112
第二节　曲面……115
第三节　超曲面……121

第三篇　其他体系中的多维画法几何学

第九章　直角坐标体系中的四维画法几何学……127
第一节　几何元素的图示法……127
第二节　几何元素间的相对位置……130
第三节　投影变换……133
第四节　依卡哈脱方法……134
第十章　多层坐标面体系中的多维画法几何学……137
第一节　几何元素的图示法……137
第二节　几何元素间的相对位置……139
第三节　投影变换……140
第四节　孔斯方法……142
第十一章　平行向量体系中的四维画法几何学……143
第一节　几何元素的图示法……143
第二节　几何元素间的相对位置……145
第三节　费里波夫方法……146
第十二章　星形坐标体系中的多维画法几何学……149
第一节　星形坐标体系的建立……149
第二节　几何元素的图示法……149
第三节　几何元素间的相对位置……152
第四节　曲面、超曲面的图示法……154

第四篇　多维画法几何在科学技术方面的应用

第十三章　在物理、化学、冶金中的应用……156
第一节　确定类质同晶化合物的成分……156
第二节　线图及其在物理-化学分析等领域中的应用……157
第三节　在多元合金系统浓度图中的应用……158
第四节　在多元化学状态图中的应用……160
第十四章　在光滑曲面设计中的应用……163
第一节　基本概念与方法……163
第二节　应用实例……163
第十五章　在多目标优化问题中的应用……168
第一节　多目标响应（超）曲面的建立……168
第二节　搜索多目标优化值的原理和方法……171
第十六章　在线性规划问题中的应用……174
第一节　线性规划问题的基本概念和图解原理……174
第二节　可行域及其顶点位置的判别……176
第三节　应用实例……178
参考文献……181

第一篇　多维几何学导论

第一章　多维空间的基本知识

第一节　多维空间的直角坐标与子空间

一、多维空间的直角坐标

从代数学的角度来看，欧氏空间是含有内积运算的线性空间，空间的维数就是在该空间内所包含的线性无关向量的最大数目。以下，n 维欧氏空间简称为 n 维空间，以 S^n 表示，S^3 就是我们熟悉的三维空间；当 $n > 3$ 时，就是多维几何学所讨论的多维空间。

由线性代数得知，n 维空间 S^n 中存在 n 个线性无关的标准正交向量 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、……$\vec{e}_n$，即它们满足

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i、j = 1、2、\cdots\cdots n \tag{1-1}$$

取线性空间的零元为原点 O，取 $\vec{e}_i$ 为第 i 个坐标轴 x_i 的方向，则可建立 S^n 的一个直角坐标系 $O-x_1x_2\cdots\cdots x_n$，或记为$\{O,\ \vec{e}_1、\vec{e}_2\cdots\cdots\vec{e}_n\}$，$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、……、$\vec{e}_n$ 称为 S^n 的一组标准正交基向量。

在 n 维空间 S^n 中，任一向量 $\vec{C}$ 可由基向量线性表示：

$$\vec{C} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + c_n\vec{e}_n \tag{1-2}$$

式中　(c_1、c_2、……、c_n) 称为向量 $\vec{C}$ 的坐标。

同样，对于 S^n 中任一点 P，$\overrightarrow{OP}$ 可由基向量线性表示：

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots\cdots + x_n\vec{e}_n \tag{1-3}$$

式中 (x_1、x_2、……x_n) 称为点 P 在直角坐标系 $O-x_1x_2x_3\cdots x_n$ 中的坐标，x_i 是点 P 在第 i 个 x 坐标轴上的坐标分量。

二、多维空间的子空间

设 u_1、u_2、……u_k 是 S^n 中的 k 个线性无关的向量，L^k 表示它们所生成的 S^n 的子集（也即所有可能的线性组合所生成的集合）。设 P_0 是 S^n 中任一已知点，则 S^n 的子集

$$P_0 + L^k = \{P_0 + a \mid a \in L^k\} \tag{1-4}$$

称为 S^n 的一个 k 维子空间，以 S^k 表示。当 $k = 0$、1、2、3 时，S^0、S^1、S^2、S^3 分别称为 S^n 中的点、直线、平面和三维空间。

为便于讨论，引入符号 $\|A_{m\times n}\|_r = 0$，表示 $m \times n$ 阶矩阵 A 中的所有 r 阶子式都为 0，即矩阵 A 的秩为 $r-1$。不难证明：在 $\|A_{m\times n}\|_r = 0$ 中，含有 $(m-r+1)(n-r+1)$ 个独立条件。

设$P(x_1、x_2、\cdots\cdots、x_n)$是$S^k$中的任一点，显然，$P-P_0$可由$u_1、u_2、\cdots\cdots、u_k$线性表示，也即矩阵

$$\begin{bmatrix} P-P_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}_{(k+1)\times n}$$

的秩是k。

因此

$$\left\|\begin{matrix} P-P_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{matrix}\right\|_{k+1} = 0 \tag{1-5}$$

它所包含的独立条件数为：

$$[(k+1)-(k+1)+1][n-(k+1)+1]=n-k$$

因此可在其中找出$n-k$个独立的$k+1$阶子行列式为零，从而得

$$S^k: \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots a_{1n}x_n+b_1=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots a_{2n}x_n+b_2=0 \\ \vdots \\ a_{(n-k)_1}x_1+a_{(n-k)_2}x_2+\cdots\cdots+a_{(n-k)_n}x_n+b_{(n-k)}=0 \end{cases} \tag{1-6}$$

当$k=n-1$时

$$S^{n-1}: \ a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n+b=0 \tag{1-7}$$

由此可见，S^n的k维子空间S^k是$n-k$个$n-1$维子空间的交空间。

在讨论n维空间时，其所属的k维子空间均以S^k（$k=0、1、2、\cdots\cdots n-1$）表示。

第二节 多 维 图 形

一、多维单纯形及其确定方法

单纯形是指最简单的图形，如点为零维空间的单纯形，即为零维单纯形。直线是由两点所确定的，即两个零维图形决定一个一维图形。直线在一维空间中是最简单的图形，即为一维单纯形，如图1-1中的AB。由不在同一个一维空间中的三个点确定的三角形是二维单纯形(三点形)，如图1-2中的$\triangle ABC$。由不在同一个二维空间中的四个点确定的四面体是三维单纯形（四点形），如图1-3中的四面体$ABCD$。由不在同一个三维空间中的五个点确定的四维图形即为四维单纯形(五点形)，如图1-4中的图形$ABCDE$。可以推出，由不在($n-1$)维空间中的$n+1$个点所确定的n维图形是n维单纯形（$n+1$点形）。以上这些点称为独立点。所谓独立点，是指这些点中任一点的位置都不取决于其它点的位置，即这些点是不相关

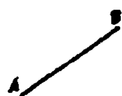


图1-1 一维单纯形

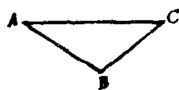


图1-2 二维单纯形

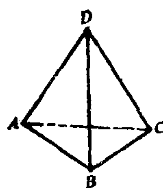


图1-3 三维单纯形

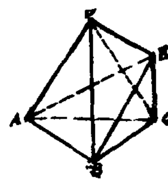


图1-4 四维单纯形

的。在该单纯形上不能通过它的对角线得到 $n-1$ 维的截切单纯形。

由图 1-3 可知，一个三维图形（即四点形）包含四个零维单纯形，六个一维单纯形，四个二维单纯形。同理，由图 1-4 可知，一个四维单纯形包含五个零维单纯形，十个一维单纯形，十个二维单纯形和五个三维单纯形。由此可推出 n 维单纯形包含

$n-1$ 维单纯形数：$C_n^{n-1}=\dfrac{n!}{(n-n+1)!\ (n-1)!}=n$

$n-2$ 维单纯形数：$C_n^{n-2}=\dfrac{n!}{2!\ (n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$n-3$ 维单纯形数：$C_n^{n-3}=\dfrac{n!}{3!\ (n-3)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

⋮

三维单纯形数：$C_n^3=\dfrac{n!}{(n-3)!\ 3!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

二维单纯形数：$C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

一维单纯形数：$C_n^1=\dfrac{n!}{(n-1)!}=n$

由此可知，$C_n^{n-1}=C_n^1$，$C_n^{n-2}=C_n^2$，$C_n^{n-3}=C_n^3$，即 n 维单纯形中包含的 $n-1$ 维单纯形数等于一维单纯形数，$n-2$ 维单纯形数等于二维单纯形数，其余依此类推。

表 1-1 为不同维数的单纯形所包含的较低维的单纯形数。

表1-1 不同维数的单纯形所包含的较低维单纯形数

维数	单纯形	组成的单纯形数											
		零维单纯形	一维单纯形	二维单纯形	三维单纯形	四维单纯形	五维单纯形	六维单纯形	七维单纯形	八维单纯形	九维单纯形	十维单纯形	十一维单纯形
0	点	1											
1	直线段	2	1										
2	三角形	3	3	1									
3	四点形	4	6	4	1								
4	五点形	5	10	10	5	1							
5	六点形	6	15	20	15	6	1						
6	七点形	7	21	35	35	21	7	1					
7	八点形	8	28	56	70	56	28	8	1				
8	九点形	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
9	十点形	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
10	十一点形	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
11	十二点形	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

表中每一个数都是这样的两个数之和：第一个数在所求数的上方，第二个数在第一个数的左侧。

二、多维空间

任何维数的空间都可以由相应的同一维数的单纯形给定。通常三维空间可由下列几何元素组之一给定：

（1）四个不在同一平面上的点；

（2）一个平面和平面外一点；

（3）一个平面和不在平面上而与平面相交或平行的一条直线；

（4）不在同一平面上的两条直线；

（5）过同一点但不在同一平面上的三条直线；

（6）平行或相交于一条直线的两个平面；

对于四维空间可由下列几何元素组之一给定：

（1）不在同一超平面内的五个点；

（2）一个超平面和超平面外一点；

（3）一个超平面和与之相交或平行的一条直线；

（4）一个超平面和与之相交或平行的一个平面；

（5）相交于一直线的三个平面；

（6）相交或平行的两个超平面；

（7）过同一点但不在同一超平面内的四条直线；

（8）相交于一点的两个平面。

由此可类似地推出对于 n 维空间及其所包含的子空间的给定方式。

三、四维空间中的正多胞体

如同在三维空间中要求正多面体的面是正多边形一样，在四维空间中要求形体的三维边界是正多面体。这种形体称为“胞形”或“胞体”，如果它被 n 个多面体包围，称为“n-胞形”或“n-胞体”。四维空间中的正多胞形有六种，如表 1-2 所示。

表1-2　四维空间中的正多胞形

符　号	名　称	边界多面体的个数和类型	顶点数	棱边数	平面数
C_5	正5-胞形	5个正四面体	5	10	10
C_8	正8-胞形	8个正立方体	16	32	24
C_{16}	正16-胞形	16个正四面体	8	24	32
C_{24}	正24-胞形	24个正八面体	24	96	96
C_{120}	正120-胞形	120个正十二面体	600	1200	720
C_{600}	正600-胞形	600个正四面体	120	720	1200

在四维空间中，胞形的顶点数、棱边数、平面数和边界多面体数的关系应符合庞加莱(Poincaré)公式，即：

$$\text{顶点数} - \text{棱边数} + \text{平面数} - \text{边界多面体数} = 0$$

图 1-5～图 1-10 为上述正多胞形的直观图。

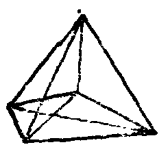


图1-5　正5-胞形

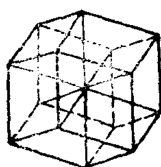


图1-6　正8-胞形

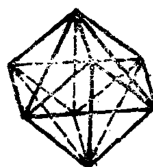


图1-7　正16-胞形

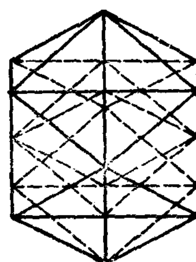


图1-8　正24-胞形

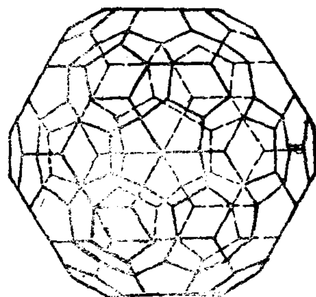


图1-9　正120-胞形

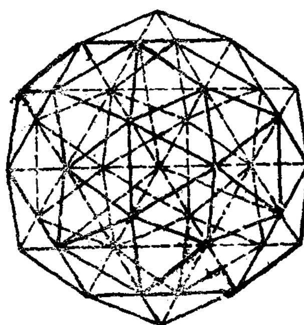


图1-10　正600-胞形

第三节　自由度与对偶性

通常，自由度是指点（即零维空间）在n维空间中的自由度。例如，点在直线上有一个自由度，在平面上有二个自由度，在三维空间中有三个自由度，以此类推，在n维空间中有n个自由度。本节讨论P维子空间在n维空间中的自由度。

定理1　在n维空间S^n中，P维子空间S^P的自由度数为$(P+1)(n-P)$。

证：S^P需由$P+1$个独立点确定，S^n中的每个点需要n个条件，因此共需$(P+1)n$个条件，因S^P上的每个点应有P个自由度，故$P+1$个独立点中的每一个点仅需$n-P$个条件给定，因此S^n中S^P的自由度数d_f为$(P+1)(n-P)$。S^P的自由度数d_f也称为S^P的不变数。

定理2　在n维空间S^n中，通过r维子空间S^r的P维超平面的自由度数d_f为$(n-P)\times(P-r)$。

证：由上述定理得知，S^P的自由度为$(P+1)(n-P)$，若S^P通过r维子空间S^r，则S^P有$(P+1)-(r+1)=P-r$个独立的点，这时S^P的自由度数$d_f=(n-P)(P-r)$。

下面讨论其对偶性质：在n维空间S^n中，若P维超平面S^P与$(n-P-1)$维超平面S^{n-P-1}具有相同的自由度$(P+1)(n-P)$，则S^P与S^{n-P-1}称为对偶空间，由此可得下列定理。

定理3　在n维空间中，两个子空间S^P和S^{n-P-1}是对偶空间。

表1-3为两个互相对偶的空间与相应的自由度数。

运用对偶原理，如果将n维空间中的有关空间互换，则相应的命题仍然成立。如在四维

表1-3　两个对偶空间和相应的自由度数

两个对偶空间		自由度数 d_f
S^0	S^{n-1}	n
S^1	S^{n-2}	$2(n-1)$
S^2	S^{n-3}	$3(n-2)$
⋮	⋮	⋮
S^p	S^{n-p-1}	$(n-p)(p+1)$
S^{n-1}	S^0	n

空间中，点与三维超平面，直线与平面都互相对偶，根据上述确定多维空间命题方法，可推出相应的对偶命题，如表 1-4 所示。

表1-4　对偶命题

①	两点决定一直线	两超平面相交于一平面
②	三点决定一平面	三超平面相交于一直线
③	四点决定一超平面	四超平面相交于一点
④	一点及一直线决定一平面	一超平面与一平面相交于一直线
⑤	一点及一平面决定一超平面	一超平面与一直线相交于一点
⑥	两条作为点的连线的直线决定一超平面	两个作为超平面相交的平面，只有一个公共点

第四节　四维空间的直角坐标体系与几何模型

一、四维空间的直角坐标体系

如第一节所述，当 $n=4$ 时，可通过原点建立一个直角坐标体系，它的四个坐标轴互相正交（图 1-11）。以下分析其构成。

（1）互相垂直的四条坐标轴 x、y、z、u 相交于原点 O。

（2）互相垂直的两条坐标轴构成一个坐标面，如xu、yu、zu、xy、xz、yz，分别构成π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 六个互相垂直的坐标面。

（3）每三条坐标轴或三个坐标面构成一个坐标空间，共有四个坐标空间，如$yzu(\pi_2\pi_3\pi_6)$、$xzu(\pi_1\pi_3\pi_5)$、$xyu(\pi_1\pi_2\pi_4)$、$xyz(\pi_4\pi_5\pi_6)$，分别以Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4表示。

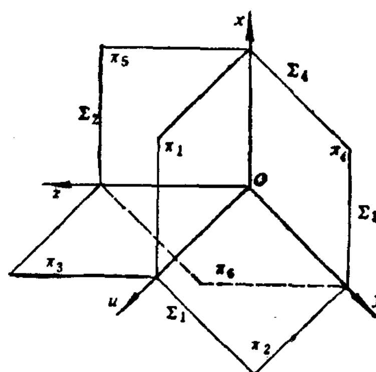


图1-11　四维空间的直角坐标体系

（4）每三个坐标面或三个坐标空间相交于一条坐标轴，如 $\pi_1\pi_4\pi_5(\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4)$、$\pi_2\pi_4\pi_6(\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_4)$、$\pi_3\pi_5\pi_6(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_4)$、$\pi_1\pi_2\pi_3(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3)$ 分别相交于 x、y、z、u 四条坐标轴。

（5）每一坐标轴与不包含该坐标轴的坐标空间垂直，如 $x\perp\Sigma_1$、$y\perp\Sigma_2$、$z\perp\Sigma_3$、$u\perp\Sigma_4$。

（6）每两个坐标面之间互相垂直。

二、四维空间的几何模型

为了便于直观地了解四维空间中几何元素的各种相对位置，可用三维空间中的图形作为四维空间的几何模型。

在射影空间中，一组平行直线相交于同一非固有点，同一平面上的两组平行直线决定两个非固有点，即平面内两条不平行直线上的两个非固有点决定了该平面上的一条非固有直线，也即平面内两条不平行的直线决定了平面的方向。非固有点、非固有直线分别表示直线和平面的方向，同理，以非固有平面来表示三维空间的方向。依此类推，在 n 维空间中有一个 $n-1$ 维非固有超平面，它代表 n 维空间的方向。

在四维空间中有一个三维非固有超平面，它代表四维空间的方向，因此把三维空间作为四维空间的非固有超平面来讨论。四维空间中的直线、平面和超平面分别与该三维空间相交于点、直线和平面，也即将四维空间中的几何元素皆降一维来讨论。

如图 1-12 所示，是以三维空间中的正四面体作为四维空间的三维非固有超平面 S^3 的几何模型，其性质如下：

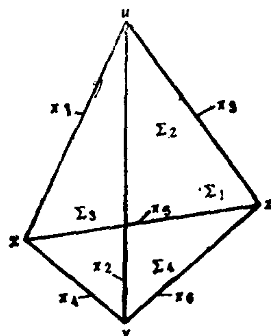


图1-12　四维空间的非固有超平面的几何模型

（1）在四维空间中，四条互相垂直的坐标轴与四维空间中的三维非固有超平面 S^3_∞ 相交于 x、y、z、u 四个顶点，这四个顶点表示四个坐标轴的方向。

（2）在四维空间中，六个互相垂直的坐标面与三维非固有超平面 S^3_∞ 相交于 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 六条棱线，这六条棱线表示六个坐标面的方向。

（3）在四维空间中，四个互相垂直的三维坐标空间与三维非固有平面 S^3_∞ 相交于 Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 四个棱面，这四个棱面表示四个坐标空间的方向。

上述 S^3_∞ 中的棱线和棱面都是可以延伸的。

根据上述四维空间的坐标体系可得各坐标空间的方程为

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1&: x=0\\
\Sigma_2&: y=0\\
\Sigma_3&: z=0\\
\Sigma_4&: u=0
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}8)
$$

各坐标面的方程为

$$
\pi_1:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}\qquad \pi_4:\begin{cases}z=0\\u=0\end{cases}
$$

$$
\pi_2:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}\qquad \pi_5:\begin{cases}y=0\\u=0\end{cases}\qquad (1\text{-}9)
$$

$$
\pi_3:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\qquad \pi_6:\begin{cases}x=0\\u=0\end{cases}
$$

各坐标轴的方程为

$$x:\begin{cases}y=0\\z=0\\u=0\end{cases}\qquad z:\begin{cases}x=0\\y=0\\u=0\end{cases}$$

$$y:\begin{cases}x=0\\z=0\\u=0\end{cases}\qquad u:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\tag{1-10}$$

第五节　四维空间中的各类几何元素

设x、y、z、u为四维空间中的坐标轴。根据本章第二节所述，一般位置的几何元素的线性方程如下：

超平面：
$$Ax+By+Cz+Du+E=0\tag{1-11}$$

平面：
$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\end{cases}\tag{1-12}$$

直线：
$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3u+E_3=0\end{cases}\tag{1-13}$$

点：
$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3u+E_3=0\\A_4x+B_4y+C_4z+D_4u+E_4=0\end{cases}\tag{1-14}$$

对于特殊位置的直线、平面、超平面的方程，需说明如下：

一、特殊位置直线

由四维空间的几何模型得知，特殊位置直线有三种类型，即空平行线，其非固有点在棱面上；面平行线、其非固有点在棱线上；轴平行线，其非固有点在顶点上。

1. 空平行线

与一个坐标空间平行的直线称为空平行线。在几何模型上，直线l的非固有点l_∞在四面体的棱面上，如图1-13所示，l_∞在yzu棱面上，即直线l平行于Σ_1。设该直线l的方向为（O、B、C、D），过定点$P_0(x_0、y_0、z_0、u_0)$的直线l的方程为

$$\left\|\begin{matrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0\\0 & B & C & D\end{matrix}\right\|_2=0$$

即

$$\begin{cases}x=x_0\\y-y_0=\dfrac{B}{C}(z-z_0)\\y-y_0=\dfrac{B}{D}(u-u_0)\end{cases}\tag{1-15}$$

由上述方程可知，在与直线垂直某一轴，其相应的坐标值为常数。

2. 面平行线

与一个坐标面平行的直线称为面平行线。在几何模型上，直线 m 的非固有点 m_∞ 在四面体的棱线上。如图 1-13 所示，m_∞ 在 xy 棱线上，即直线 m 平行于 $xy(\pi_4)$面。设直线 m 的方向为（A、B、0、0），过 $P_0(x_0、y_0、z_0、u_0)$ 的 m 直线的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ A & B & 0 & 0 \end{matrix}\right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0) \\ z=z_0 \\ u=u_0 \end{cases} \tag{1-16}$$

3. 轴平行线

与一条轴平行的直线称为轴平行线。在几何模型上，直线 n 的非固有点 n_∞ 在四面体的顶点上。如图 1-13 所示，n_∞ 在 u 上，即直线 n 平行于坐标轴 u，其方向为（0，0，0，1），则过某一点 $P_0(x_0、y_0、z_0、u_0)$ 且平行于坐标轴 u 的直线 n 的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases} \tag{1-17}$$

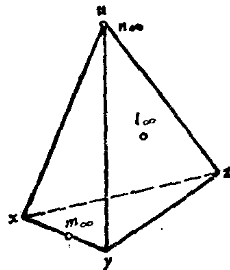


图1-13 几何模型上的特殊位置直线

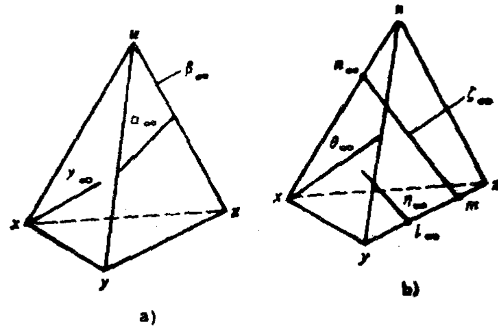


图1-14 几何模型上的特殊位置平面

二、特殊位置平面

由四维空间的几何模型得知，特殊位置平面有六种类型，即空平行面，其非固有直线在棱面上；面平行面，其非固有直线与棱线重合；空垂直面，其非固有直线通过顶点；空平行空垂直面，其非固有直线通过顶点且在棱面上；单面半平行面，其非固有直线与一条棱线相交；双面半平行面，其非固有直线通过相对的两条棱线相交。

1. 空平行面

与一个坐标空间平行的平面称为空平行面。在几何模型上，平面 α 的非固有直线 α_∞ 在四面体的棱面上，但不过顶点。如图 1-14 a 所示，α_∞ 在 yzu 棱面上。直线 α_∞ 由两点所决定，其方向为（0，a，0，b）、（0，0，c，d），若平面 α 过定点 P_0，其方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & d \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 \\ By + Cz + Du + E = 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

2. 面平行面

与一个坐标面平行的平面称为面平行面。在几何模型上，平面β的非固有直线β_∞与四面体的一条棱线重合。如图1-14a所示，非固有直线与zu棱线重合。由于该棱线与两个棱面（坐标空间）相连，故平面β与两个坐标空间平行，即$\beta \parallel \Sigma_1$，$\beta \parallel \Sigma_2$，也即$\beta \parallel \pi_3$。过P_0的平面β的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \tag{1-19}$$

3. 空垂直面

与一个投影空间垂直的平面称为空垂直面。在几何模型上，平面γ的非固有直线γ_∞过四面体的一顶点，但不在四面体的面上。如图1-14a所示，γ_∞通过顶点x，这时平面γ平行于x轴，也即垂直于Σ_1空间。设平面γ的γ_∞由两个方向为(1，0，0，0)、(0，a，b，c)的直线所确定，过P_0的平面γ的方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} z = K_1 y + b_1 \\ u = K_2 y + b_2 \end{cases} \tag{1-20}$$

4. 空平行空垂直面

与一个坐标空间垂直且与另一坐标空间平行的平面称为空平行空垂直面。在几何模型上，平面θ的非固有直线θ_∞通过四面体的一顶点，并在一棱面上。如图1-14b所示，θ_∞过顶点x且在xyu面上，即$\theta \perp \Sigma_1$、$\theta \parallel \Sigma_3$，也即$\theta \parallel x$，$\theta \perp z$。设$\theta$由两个方向为（1，0，0，0）、（0，$a$，0，$b$）的直线所确定，则过点$P_0$的$\theta$平面方程为

$$\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} z = z_0 \\ y = Ku + b \end{cases} \tag{1-21}$$

5. 单面半平行面

与一个坐标面半平行㊀的平面称为单面半平行面。在几何模型上，平面 η 的非固有直线 η_∞ 仅过四面体的一棱线上的一点，如图 1-14 b 中 η_∞ 通过 yz 棱线上的 l_∞，则 η 与坐标面 π_6 仅有一个公共的非固有点 l_∞，同时也仅包含 π_1 中的一条垂线，此时 η 与 π_6 半平行，与 π_1 半垂直㊁。设平面 η 由定点 P_0 及方向（0，a，b，0）、（c，d，0，e）所确定，其方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & a & b & 0 \\ c & d & 0 & e \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+E=0 \\ x=Ku+f \end{cases} \tag{1-22}$$

6. 双面半平行面

与两个坐标面半平行的平面称为双面半平行面。在几何模型上，平面 ζ 的非固有直线 ζ_∞ 过四面体上两对棱上的一对点。如图 1-14 b 所示，ζ_∞ 过 yz 和 xu 上的 m_∞ 和 n_∞，所以平面 ζ 与 π_1、π_6 都是半平行；同时 ζ 也因包含 π_1、π_6 中的各一条垂线，所以平面 ζ 与 π_1、π_6 都是半垂直。平面 ζ 的方程为

$$\begin{cases} y=K_1z+b_1 \\ x=K_2u+b_2 \end{cases} \tag{1-23}$$

三、特殊位置超平面

由四维空间的几何模型得知，特殊位置超平面有三种类型，即：空平行超平面，其非固有平面与棱面重合；面平行超平面，其非固有平面通过一棱线；空垂直超平面，其非固有平面通过一顶点。

1. 空平行超平面

与一个坐标空间平行的超平面称为空平行超平面。在几何模型上，超平面 T 的非固有平面 T_∞ 与棱面重合。如图 1-15所示，T_∞ 与棱面 yzu 重合，即 T_∞ 过三个顶点，故 T 与这三个顶点所代表的 y、z、u 轴平行，也即与 Σ_2、Σ_3、Σ_4 垂直，且与 x 轴垂直。T 的方程为

$$x=c \tag{1-24}$$

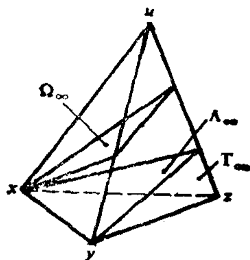


图1-15　几何模型上的特殊位置超平面

2. 面平行超平面

㊀ 指四维空间中两个不处于同一三维空间的平面，它们只有一组平行线互相平行。详细论述见第二章第三节。

㊁ 指四维空间中两个处于同一三维空间中的平面垂直，详细论述见第二章第二节。

与一个坐标面平行的超平面称为面平行超平面。在几何模型上，超平面Λ的非圆有平面Λ_∞通过一条棱线。如图1-15所示，Λ_∞通过棱线xy，即Λ与x、y轴平行，也即与Σ_1、Σ_2垂直，且与π_3垂直。Λ的方程为

$$z = Ku + b \tag{1-25}$$

3. 空垂直超平面

与一个坐标空间垂直的超平面称为空垂超平面。在几何模型上，超平面Ω的非圆有平面Ω_∞通过四面体的一个顶点，如图1-15中Ω_∞通过顶点x，这时Ω平行于x轴，也即与Σ_1垂直。Ω的方程为

$$By + Cz + Du + E = 0 \tag{1-26}$$

由上述方程可知，超平面平行某一轴，其相应的系数为0。

第二章　多维空间中几何元素的相对位置与度量问题

第一节　多维空间中的关联问题

一、两空间的关联度

设两空间的维数分别为p、q，若$p>q$，两空间的共有空间的维数为r，则p、q维两空间的关联度d_i为

$$d_i=\frac{r+1}{q+1} \tag{2-1}$$

当q维空间S^q全部属于p维空间S^p时，$r=q$，$d_i=1$，S^p、S^q为完全关联；若S^q完全不属于S^p，即无共有点时，$r=-1$，$d_i=0$，称为无关联；若$0<d_i<1$，则称为部分关联。

在四维空间中，若点、直线或平面属于三维超平面，则关联度$d_i=1$；若不属于同一个三维超平面的两平面相交为一点，即$r=0$；但$q=2$，则关联度$d_i=1/3$；对不属于同一三维超平面的直线与平面，若没有交点，即$r=-1$，但$q=1$，则关联度$d_i=0$。

二、条件数

在n维空间S^n中，一个p维子空间有$(p+1)(n-p)$个自由度，若p维子空间S^p通过S^n中的r维子空间，则仅有$(n-p)(p-r)$个自由度，因此S^p通过S^r的条件数(即约束数)应为上述两自由度数之差，即：$(n-p)(r+1)$。

若S^r在S^q中能自由运动，则S^r具有$(r+1)(q-r)$个自由度，因此S^p和S^q在S^n中相交为S^r的条件数为$(r+1)(n-p-q+r)$。以$C(n:p,q:r)$表示条件数，即

$$C(n:p,q:r)=(r+1)(n-p-q+r) \tag{2-2}$$

在S^n中，S^p通过S^r的条件数为

$$C(n:p,p:r)=(r+1)(n-p) \tag{2-3}$$

在S^n中，S^p的条件数为

$$C(n:p,p:p)=(p+1)(n-p) \tag{2-4}$$

显然，在S^n中，两对偶的子空间不仅其自由度数相等，而且其条件数也必定相等。

三、多维空间的相交定理

定理1　在n维空间S^n中，两个子空间S^p和S^q的相交空间为S^r，若$p+q\geqslant n$，则

$$r=p+q-n \tag{2-5}$$

证：n维空间中的p维子空间S^p，其方程为

$$\begin{cases}a_1^1x_1+a_2^1x_2+\cdots\cdots+a_n^1x_n+a_1=0\\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots\cdots+a_n^2x_n+a_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1^{n-p}x_1+a_2^{n-p}x_2+\cdots\cdots+a_n^{n-p}x_n+a_{n-p}=0\end{cases} \tag{2-6}$$

n维空间中的q维子空间S^q，S^q的方程为

$$\begin{cases} b_1^1x_1+b_2^1x_2+\cdots\cdots+b_n^1x_n+b_1=0 \\ b_1^2x_1+b_2^2x_2+\cdots\cdots+b_n^2x_n+b_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1^{n-q}x_1+b_2^{n-q}x_2+\cdots\cdots+b_n^{n-q}x_n+b_{n-q}=0 \end{cases} \quad (2\text{-}7)$$

S^p 和 S^q 的相交空间方程即为公式（2-6)(2-7）的联立方程。

由于 $p+q\geqslant n$，故 $(n-p)+(n-q)\leqslant n$，根据第一章第二节所述，其相交空间的维数 r 为 $(p+q-n)$。

若 $p+q=n$，则式（2-6)、(2-7）组成的方程组线性无关，即相交空间为点。若 $p+q<n$，除 S^p 与 S^q 共处在较低维空间之外，可以认为它们是不相交的。当 $p+q>n$ 时，p、q、r 之间的关系见表 2-1。

表2-1　维数p、q、r之间的关系

p \ r \ q	1	2	3	……	$n-1$
1					0
2				0	1
3			0	1	2
⋮		0	1	2	⋮
$n-1$	0	1	2	…	$n-2$

设 S^n 中有 m 个子空间，它们的维数分别为 K_1、K_2……K_m，应用上述公式，可得出它们相交空间的维数 r 为

$$r=K_1+K_2+\cdots\cdots+K_m-(m-1)n \quad (2\text{-}8)$$

根据式（2-5）及（2-8）可得出四维空间中子空间相交的一些性质：

（1）一直线与一超平面相交于一点。因 $p=1$，$q=3$，得 $r=1+3-4=0$，相交几何元素为零维空间，即为点。

（2）一直线与一平面若不属于同一超平面，则不会相交。因 $p=1$，$q=2$，得 $r=1+2-4=-1$，相交几何元素的维数为负数，即不相交。

（3）不属于同一超平面的两个平面相交于一点。因 $p=2$，$q=2$，得 $r=2+2-4=0$，相交几何元素为零维空间，即为点。

（4）一平面与一超平面相交于一直线。因 $p=2$，$q=3$，得 $r=2+3-4=1$，相交几何元素为一维空间，即为直线。

（5）两个超平面相交于一平面。因 $p=q=3$，得 $r=3+3-4=2$，相交几何元素为二维空间，即为平面。

（6）三个超平面相交于一直线。因 $k_1=k_2=k_3=3$，$m=3$，得 $r=3+3+3-(3-1)4=1$，相交几何元素为一维空间，即直线。

（7）四个超平面相交于一点。因 $k_1=k_2=k_3=k_4=3$，$m=4$，得 $r=3+3+3+3-(4-1)4=0$，相交几何元素为零维空间，即为点。

根据上述性质可推出四维空间中的一些有关定理。

定理 2 若一个平面和一个超平面有一个共有点，则过该点必有一条共有直线。

定理 3 若两个超平面有一个共有点，则过该点必有一个共有面。

定理 4 若三个超平面有一个共有点，则至少有一条共有直线，该直线在一个超平面内，且在另两个超平面的交平面上。

以下对四维空间中子空间的某些相交问题作直观说明。

（1）不属于一超平面的直线与该超平面相交于一点。

如图 2-1 所示，设直线 l 分别与两个不同的超平面 T_1(由 1、2、3、4 四个点决定)、T_2(由 1、2、3、5 四个点决定) 相交于点 M、N。若 l 与 T_1 又相交于点 K，则 MK(也即 l)属于 T_1；因为 N 在 l 上，所以 N 也属于 T_1，1、2、3、N 四点属于 T_1 和 T_2，即 $T_1 \equiv T_2$，故与假定矛盾。

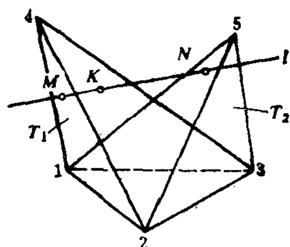


图2-1 直线与超平面相交于一点的直观说明

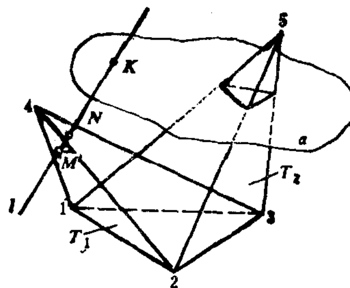


图2-2 一直线和一个平面不相交的直观说明

（2）一条直线和一个平面不属于同一个三维超平面，该直线与该平面不相交。

如图 2-2 所示，已知直线 l 属于 T_1，平面 α 属于 T_2，如果 l 与 α 相交于点 K，则 1、2、3、K 既属于 T_1 也属于 T_2，则 $T_1 \equiv T_2$，故与假定矛盾。

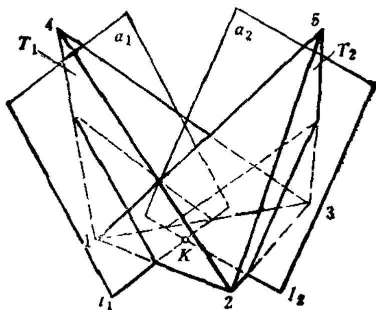


图2-3 不属于同一个三维超平面的两个平面相交于一点的直观说明

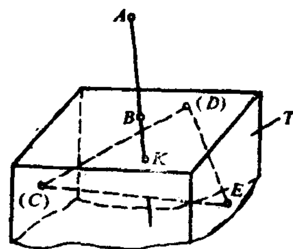


图2-4 点从属于超平面的直观说明

（3）不属于同一个三维超平面的两个平面相交于一点。

如图 2-3 所示，已知两超平面 T_1、T_2，α_1、α_2 分别属于 T_1、T_2，α_1、α_2 与底面 123 分别相

交于 l_1、l_2，l_1 与 l_2 的交点K即为 α_1 与 α_2 两平面的交点。除此以外，不可能有其他交点；如另有不在 123 面上的共有点，则 $T_1 \equiv T_2$，这与假定是矛盾的。

四、四维空间的关联定理

（1）在一条直线上，若有两个点在已知超平面内，则此直线完全从属于该超平面。

（2）在同一平面上，若有三个不同在一直线上的点在已知超平面内，则该平面完全从属于该超平面。

（3）若一点在属于超平面的直线或平面上，则该点从属于该超平面。

（4）若一点与超平面内任一点的连线和超平面内另外两直线所决定的平面相交，则该点在超平面内。如图 2-4 所示，已知一点 A 与超平面 T，如 B 为 T 内的点，CD、CE 决定的平面为 T 内的平面；如直线 AB 与平面 CDE 相交于K点，则K点在 T 内。因为BK属于 T，A 是BK上的点，因此也必定属于 T。

（5）若 A'、B'、C'、D' 是属于三维超平面 $ABCD$ 的四个非同一平面的点，则超平面 $A'B'C'D'$ 与超平面 $ABCD$ 等同。

由此类推，上述关联定理也可用于高维空间。

第二节　多维空间中的垂直问题

一、垂直的概念

在二维平面上的两直线 a、l 互相垂直，其交点为K，显然，过直线 a 上的一点K只有一条直线 l 与 a 垂直。在三维空间中，若直线 a 同时垂直于两相交直线l_1、l_2，则必定垂直于由 l_1、l_2 所决定的平面上的所有直线。在四维空间中，若直线 a 同时垂直于三条相交直线 l_1、l_2、l_3，此三条相交直线不在同一平面内，则直线 a 垂直于由 l_1、l_2、l_3决定的超平面 T。还可以证明直线 a 必定垂直于超平面内的任一直线。如图 2-5 所示，b 是 T 中的一条直线，过 l_3、b 的平面与 l_1、l_2 决定的平面相交于直线 c，由于 $a \perp l_1$，$a \perp l_2$，因此 $a \perp c$；$a \perp l_3$，因此 $a \perp b$。由此可类推至 n 维空间，且得到如下定理。

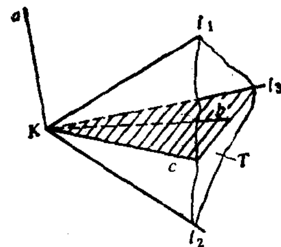


图2-5　四维空间中的垂直概念

定理 1　在 n 维空间中，若直线 a 垂直于由（$n-1$）条独立的相交直线所决定的（$n-1$）维子空间，则直线 a 必定垂直于过垂足且在（$n-1$）维子空间内的任何直线。反之，与直线 a 垂直的任意直线都在与 a 垂直的（$n-1$）维子空间内。

定理 2　在 n 维空间中，若直线分别垂直于过同一点的（$n-1$）条独立（即不在同一（$n-2$）维子空间）的直线，则该直线必定垂直于（$n-1$）条直线所决定的（$n-1$）维子空间。

二、完全垂直（绝对垂直）

由上述分析可知，已知一直线 a_1，过 a_1 上的点K垂直于 a_1 的所有直线在垂直于 a_1 的（$n-1$）维子空间内。设 a_2 是其中的一条直线，则过K点垂直于 a_1 和 a_2 的所有直线在（$n-2$）维子空间内，（$n-2$）维子空间是分别对 a_1、a_2 垂直的两个（$n-1$）维子空间的交空间。依次类推，设 a_3 是（$n-2$）维子空间内的一条直线，可以得到 a_1、a_2、a_3……a_n 等直线互

相垂直。设 a_1、a_2……a_p 等 p 条直线决定一个 p 维子空间 S^p，其余（$n-p$）条直线决定一个（$n-p$）维子空间 S^{n-p}，这两个子空间相交于点 K，显然，在 S^p 中过点 K 的每一条直线都垂直于 S^{n-p} 中过点 K 的每一条直线，这时两个子空间的相互关系称为完全正交或完全垂直，又称全垂直或绝对垂直。

在四维空间中，过平面 α 上的点 K 且垂直于平面 α 的所有直线的集合是对 α 完全垂直的另一平面 β。

三、两空间的垂直度（正交度）

设 S^p、S^q 是 S^n 中的两个子空间，$p \geqslant q$，S^{n-p} 是 S^n 中过一定点而与 S^p 垂直（正交）的几何元素的集合，若 S^{n-p}、S^q 的交空间为 S^m（$m \neq 0$），则 S^p 与 S^q 是垂直的，其垂直度（正交度）d_r 为

$$d_r = \frac{m}{q} \tag{2-9}$$

即两空间的垂直度用分式表示，分母 q 表示较低维空间的维数，分子 m 为位于 S^q 中且与 S^p 完全垂直的子空间的维数。

在三维空间中，平面与平面的垂直是半垂直（半正交），而直线与平面的垂直则是完全垂直（完全正交）。

当 S^p、S^q 的和等于 S^n 时，即 S^p、S^q 不同时位于 S^n 中低于 n 维的空间中时，则它们的最大垂直度 d_r 如表 2-2 和表 2-3 所示。

表2-2　当 $n-1$ 为偶数 $2k$ 时 S^p 与 S^q 的垂直度 d_r

d_r　q / p	1	2	……	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	……	$2k-1$	$2k$
$k+1$						$\frac{k}{k}$	$\frac{k}{k+1}$				
$k+2$					$\frac{k-1}{k-1}$	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{k-1}{k+1}$	$\frac{k-1}{k+2}$			
$k+3$				$\frac{k-2}{k-2}$	$\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{k-2}{k}$	$\frac{k-2}{k+1}$	$\frac{k-2}{k+2}$			
⋮			⋰	……	……	……	……	……	⋱		
$2k-1$		$\frac{2}{2}$	……	$\frac{2}{k-2}$	$\frac{2}{k-1}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k+1}$	$\frac{2}{k+2}$	……	$\frac{2}{2k-1}$	
$2k$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	……	$\frac{1}{k-2}$	$\frac{1}{k-1}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{k+2}$	……	$\frac{1}{2k-1}$	$\frac{1}{2k}$

在四维空间中的垂直度如表 2-4 所示。由此可见，两平面垂直，直线与超平面垂直是完全垂直；平面与超平面垂直，其垂直度为 1/2；两超平面之间垂直，其垂直度为 1/3。

四、四维空间中的垂直定理

1. 直线与超平面垂直

根据上述定义得知，在四维空间中，当一直线与属于一点的三条非共面的直线垂直相交时，该直线垂直于由属于一点的三条非共面直线所决定的超平面。直线与超平面垂直的垂直度 $d_r = 1$。

表2-3　当$n-1$为奇数$2k-1$时S^p与S^q的垂直度d_r

d_r \ q / p	1	2	……	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	……	$2k-2$	$2k-1$
k						$\frac{k}{k}$					
$k+1$					$\frac{k-1}{k-1}$	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{k-1}{k+1}$				
$k+2$				$\frac{k-2}{k-2}$	$\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{k-2}{k}$	$\frac{k-2}{k+1}$	$\frac{k-2}{k+2}$			
⋮			⋰	………	………	………	………	………	⋱		
$2k-2$		$\frac{2}{2}$	………	$\frac{2}{k-2}$	$\frac{2}{k-1}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k+1}$	$\frac{2}{k+2}$	……	$\frac{2}{2k-2}$	
$2k-1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	………	$\frac{1}{k-2}$	$\frac{1}{k-1}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{k+2}$	……	$\frac{1}{2k-2}$	$\frac{1}{2k-1}$

直线与超平面垂直的几何性质可用以下定理加以说明：

表2-4　四维空间中的垂直度

d_r \ q / p	1	2	3
1			1
2		1	$\frac{1}{2}$
3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

定理 1　过已知直线上任一点有一个且只有一个超平面垂直于已知直线。

证：设已知直线为

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{m_3}=\frac{u-u_0}{m_4}$$

过该直线上的点（x_0、y_0、z_0、u_0）与直线垂直的超平面方程为

$$m_1(x-x_0)+m_2(y-y_0)+m_3(z-z_0)+m_4(u-u_0)=0$$

显然，该超平面是唯一存在的。

定理 2　过直线外的一点可作一个且只能作一个超平面垂直于已知直线。

证：设已知直线 l 为

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{m_3}=\frac{u-u_0}{m_4}$$

设直线外一点 $P_1(x_1,y_1,z_1,u_1)$。若点$P(x,y,z,u)$是满足$\overrightarrow{P_1P}\perp l$的任一点，则必定满足

$$m_1(x-x_1)+m_2(y-y_1)+m_3(z-z_1)+m_4(u-u_1)=0$$

这是一个超平面的方程式，该超平面与 l 垂直且通过点 P_1，它是唯一存在的。

定理 3　过超平面内一点可作一条且只有一条直线垂直于已知超平面。

证：设 $P_0(x_0,y_0,z_0,u_0)$ 是超平面 T 内的一点，T 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D(u-u_0)=0$$

设点$P(x,y,z,u)$满足$\overrightarrow{P_0P}\perp$ T，则$\overrightarrow{P_0P}$平行于 T 的法向$\{A,B,C,D\}$，故得

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}=\frac{u-u_0}{D}$$

这就是过 P_0 与 T 垂直的直线方程，显然，它是唯一存在的。

定理 4 过超平面外一点可作一条且只有一条直线垂直于已知超平面。

证：设 $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$ 是超平面T外的一点，T的方程为

$$Ax+By+Cz+Du+E=0$$

点 $P(x, y, z, u)$ 是满足 $\overrightarrow{P_0P}\perp T$ 的任一点，则得

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}=\frac{u-u_0}{D}$$

这是过 P_0 与T垂直的直线方程，它是唯一存在的。

定理 5 垂直于同一超平面的两条直线位于同一平面内。

证：设直线 l_1、l_2 垂直于同一超平面T，T的方程为

$$Ax+By+Cz+Du+E=0$$

l_1 的方程为

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}=\frac{u-u_1}{D}$$

l_2 的方程为

$$\frac{x-x_2}{A}=\frac{y-y_2}{B}=\frac{z-z_2}{C}=\frac{u-u_2}{D}$$

可见 l_1、l_2 位于同一平面 α 内

$$\left\|\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & u-u_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & u_2-u_1 \\ A & B & C & D \end{matrix}\right\|_3=0$$

定理 6 若一直线与一平面相交，则过交点与两者都垂直的直线必定垂直于两者所确定的超平面。或者，若两平面相交于一直线，则过交线上任一点与两平面垂直的直线必定垂直于由该两平面所确定的超平面。

证：首先证明定理的第一部分。选择四维直角坐标系 $O\text{-}xyzu$，取直线 l 为 u 轴，即其方程为

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0$$

平面 α 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1u=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2u=0 \end{cases}$$

直线与平面相交于坐标原点 $O\ (0, 0, 0, 0)$，则在 O 点处与直线 l 垂直的超平面的方程为 $u=0$，在 O 点处与平面 α 绝对垂直的平面方程为

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z & u \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{matrix}\right\|=0$$

即

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}y+0\cdot z+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}u=0 \\ \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}x+0\cdot y+\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}z+\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}u=0 \end{cases}$$

在交点处与两者都垂直的直线 l'，其方程为上述超平面与绝对垂直的平面的联立方程。即

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} y = 0 \\ \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

在 O 点处与 l' 垂直的超平面 T′ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即为

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} z = 0$$

由 l 与 α 所确定的超平面 T 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} & 0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

展开后，即得

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} z = 0$$

由此可以看出，T′ 与 T 的方程相同。所以，与 l、α 都垂直的直线 l' 必定垂直于两者所确定的超平面 T。

以下证明定理 6 的第二部分。

设两平面 α_1、α_2 的方程为

$$\begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z + D_1 u = 0 \\ B_2 y + C_2 z + D_2 u = 0 \end{cases}$$

α_1、α_2 相交于直线 x 轴，其方程为

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

在交线 x 轴上任取一点 $P_0(x_0, 0, 0, 0)$，作平面 α_1^* 与 α_1 绝对垂直，其方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y & z & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

过 P_0 作与 α_2 绝对垂直的平面为 α_2^*，其方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y & z & u \\ 0 & B_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & B_2 & C_2 & D_2 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} u = 0 \end{cases}$$

过 P_0 垂直于 α_1、α_2 的直线为 l，其方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} u = 0 \end{cases}$$

由 α_1、α_2 所决定的超平面为 T，其方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} u = 0$$

显然，在 P_0 处垂直于 T 的直线方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y & z & u \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{matrix}\right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} u = 0 \end{cases}$$

这就是直线 l 的方程。因此 l 必定垂直于由 α_1、α_2 两平面所确定的超平面 T。

定理 7 垂直于一超平面的一条直线必定垂直于过该垂足且在超平面内的每一个平面。

反之，在同一点上垂直于一已知直线的所有平面必定在过该点且垂直于已知直线的超平面内。

证：取直线 l 为 u 轴，其方程为 $x=0$，$y=0$，$z=0$；与之垂直的超平面T，其方程为 $u=0$，垂足为原点 $O(0,0,0,0)$。

设 e_1、e_2、e_3、e_4 是四维空间 $O-xyzu$ 的一组标准正交基；α 为T中任一过点O的平面，P 为 α 上的任意一点，则

$$\overrightarrow{OP}=t_1e_1+t_2e_2+t_3e_3$$

故

$$e_4\cdot\overrightarrow{OP}=e_4(t_1e_1+t_2e_2+t_3e_3)=0$$

即

$$\overrightarrow{OP}\perp u$$

因此，包含 $\overrightarrow{OP}$ 的平面 α 也必定垂直于 u；直线 l 垂直于过垂足的超平面内的每一个平面。

反之，设 α 是过点O垂直于已知直线 u 的任一平面，P 是 α 上的任一点，设

$$\overrightarrow{OP}=t_1e_1+t_2e_2+t_3e_3+t_4e_4$$

由于 $e_4\cdot\overrightarrow{OP}=0$，得 $t_4=0$，因而 $\overrightarrow{OP}=t_1e_1+t_2e_2+t_3e_3$，即点 P 在T内，因此与直线 l 垂直的任一平面 α 必定在超平面T内。

在 n 维空间中，上述定理同样也是成立的。

定理 8　在 n 维空间中，若已知直线 l 垂直于 $n-1$ 维子空间，则直线 l 必定垂直于 $n-1$ 维子空间内所包含的过垂足的任意 P 维子空间。反之，在同一点上垂直于已知直线 l 的任意 P 维子空间必定位于过该点且垂直于已知直线的 $n-1$ 维子空间内。

2. 两平面绝对垂直

由前述得知，在 n 维空间中，与 P 维子空间绝对垂直的超平面的维数为 $n-P$。因此，在四维空间中，不属于同一三维子空间的两平面相互垂直必定为绝对垂直。以下对两平面的绝对垂直作直观说明。

如图 2-6 所示，已知在 α 平面上两直线 a、b 相交于点 K，过点 K 作超平面 T_1、T_2 分别与 a、b 垂直，则 T_1 与 T_2 的相交平面为 α'。由此可见，平面 α' 上的任一直线均垂直于 α 上的任一直线，反之也然。如果已知两平面相交于一点，若其中一个平面上过该点的任一直线均垂直于另一平面上的过该点的任一直线，则两平面绝对垂直。绝对垂直的符号是 $\veebar$，即 $\alpha\veebar\alpha'$。

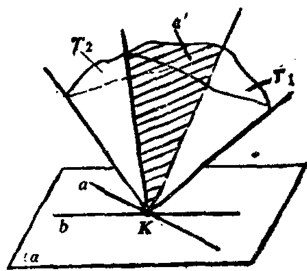


图2-6　两平面绝对垂直的直观说明

关于两平面绝对垂直的几何性质，由以下一些定理加以说明。

定理 1　过已知平面上一点作垂直于该平面的所有直线必定在同一平面上。

证：设平面 α 的参数方程为

$$P=P_0+t_1\vec{p}_1+t_2\vec{p}_2$$

其中 $\vec{p}_1$ $(A_1、B_1、C_1、D_1)$、$\vec{p}_2(A_2、B_2、C_2、D_2)$ 是 α 上两线性无关的定向量，设 $M(x,y,$

z, u）是过已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$垂直于 α 的直线上的任一点，则$\overrightarrow{P_0M}\perp\vec{p}_1$，$\overrightarrow{P_0M}\perp\vec{p}_2$，由此可得

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)+D_1(u-u_0)=0$$
$$A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)+D_2(u-u_0)=0$$

显然，这样的直线都在同一平面 α' 上，其方程为上述两方程的联立方程，即

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)+D_1(u-u_0)=0 \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)+D_2(u-u_0)=0 \end{cases}$$

定理 2 过平面上一点可以引不止一条直线与该平面垂直。

显然，此定理的证明可由上述定理导出。

定理 3 过平面上任一点有一个且只有一个平面绝对垂直于已知平面。

证：设已知平面 α 的方程为

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)+D_1(u-u_0)=0 \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)+D_2(u-u_0)=0 \end{cases}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$ 为 α 上一点，过点 P_0 与平面 α 绝对垂直的平面 α' 的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

显然，它是唯一存在的。

定理 4 过平面外任意一点有一个且只有一个平面绝对垂直于已知平面。

证：设已知平面 α 的方程为

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$ 是平面 α 外的一点，设过 P_1 与 α 绝对垂直的平面 α' 的方程为

$$\begin{cases} A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)+D_1(u-u_1)=0 \\ A_2(x-x_1)+B_2(y-y_1)+C_2(z-z_1)+D_2(u-u_1)=0 \end{cases}$$

因为 α 与 α' 相交于一点，即$P_0(x_0, y_0, 0, 0)$所以$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，故上述 α' 平面方程为

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1z+D_1u=0 \\ A_2(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_2z+D_2u=0 \end{cases}$$

设$P(x, y, z, u)$ 是满足 $\overrightarrow{P_0P}\perp\alpha$ 的任一点，则$\overrightarrow{P_0P}$、$\vec{e}_3$、$\vec{e}_4$ 线性相关，其中$\vec{e}_3=(0, 0, 1, 0)$，$\vec{e}_4=(0, 0, 0, 1)$，即有

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

由此，得$x=x_0, y=y_0$。点 P 的坐标 (x_0, y_0, z, u) 满足 α' 平面方程，从而得$C_1=D_1=C_2=D_2=0$。则 α' 的方程为

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)=0 \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)=0 \end{cases}$$

又因 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，所以$a'$的方程为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

该方程正是在 P_0 点处与 α 绝对垂直的平面方程。它过 P_1 点，而且是唯一存在的。

定理 5 若两个平面相交于一直线，且决定一超平面，则过交线上任一点分别与这两个平面绝对垂直的两个平面相交于一条直线且属于另一超平面。

证：设在 $O-xyzu$ 坐标系中，相交于一直线的两平面所确定的超平面的方程为 $u=0$，这时两平面 α 、β 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=0 \\ u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2x+B_2y=0 \\ u=0 \end{cases}$$

设两平面的交线为 z 轴，其方程为 $x=0$，$y=0$，$u=0$。则在$K(0,0,z_0,0)$ 处与 α 、β 绝对垂直的平面 α'、β' 的方程为

$$\begin{Vmatrix} x & y & z-z_0 & u \\ A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}_3 = 0$$

$$\begin{Vmatrix} x & y & z-z_0 & u \\ A_2 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} B_1x-A_1y=0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2x-A_2y=0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

由此可见，α'、β' 相交于直线 a'，其方程为$x=0$，$y=0$，$z=z_0$，且属于同一超平面 $z=z_0$。

该定理也可应用综合法直观地进行论证。如图 2-7 所示，两平面 α 、β 相交于直线 a，过 a 上的一点K分别与 α 、β 呈绝对垂直的两平面为α'、β'，在同一个垂直 a 于点K的超平面内，因而α'、β'必定交于一条直线 a'。

定理 6 若两个平面绝对垂直于第三个平面，则该两平面在同一个超平面内。

证：设已知平面 γ 的方程为

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

在点$K_1(x_1, 0, 0, 0)$、$K_2(x_2, 0, 0, 0)$处，与平面γ绝对垂直的平面α、β的方程为

$$\left\| \begin{matrix} x-x_1 & y & z & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|_3 = 0$$

$$\left\| \begin{matrix} x-x_2 & y & z & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|_3 = 0$$

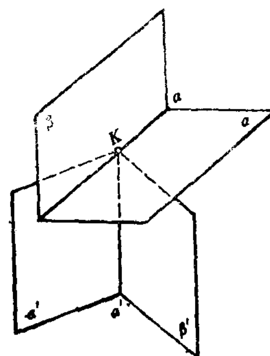


图2-7　与相交两平面分别绝对垂直的两平面必定相交于一直线

即

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2 \\ y = 0 \end{cases}$$

显然，α、β两平面处在同一超平面内，其方程为$y = 0$。

定理 7　若一平面垂直于两个绝对垂直的平面之一，且经过该两平面交点，则该平面也必定垂直于另一平面。

证：设绝对垂直的两个平面α、β的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

它们相交于$O(0, 0, 0, 0)$。设垂直于α且过点的O平面γ的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1u = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2u = 0 \end{cases}$$

γ与α相交于一直线，则

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

所以

$$\gamma \perp \beta$$

定理 8　若一个平面与两个绝对垂直的平面中任一平面的交线都是直线，则该平面必定与绝对垂直的两个平面都垂直。

证：设两个绝对垂直的平面α、β的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

设另一平面γ，其方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1u + E_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2u + E_2 = 0 \end{cases}$$

γ与α、β两平面都交于一直线，γ显然经过α、β两平面的交点，因此$E_1 = E_2 = 0$。

γ与α相交于一直线，则

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

γ与β相交于一直线，则

$$\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$$

由于

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\gamma \perp \alpha$，$\gamma \perp \beta$

定理9 若两个平面垂直，过其交线上的任一点与它们绝对垂直的两平面也必定互相垂直。

证：设两个垂直平面α、β的方程为

$$\begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

α、β的交线为x轴，其方程为

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

在x轴上任一点$P_0(x_0, 0, 0, 0)$处作两个平面α'、β'与α、β绝对垂直，其方程分别为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

显然，α'与β'互相垂直。

定理10 属于同一超平面的两个垂直平面和它们的绝对垂直平面确定四条相交的非共面的互相垂直的直线。

证：设在同一超平面Σ_1：$x=0$中这两个垂直平面为π_2、π_3，其方程分别为

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

与它们绝对垂直的平面为π_5、π_6，即

$$\begin{cases} y=0 \\ u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

这四个坐标面确定了四条相交的非共面且互相垂直的直线，即四条坐标轴。

3. 平面与超平面垂直

定义 一个平面与已知超平面相交，若该平面与属于超平面内的另一个平面在其交线上的某一点绝对垂直，则该平面在该点上垂直于超平面。

如图 2-8 所示，平面α绝对垂直属于超平面T的平面β，则平面α在K点处垂直于超平面。由此可推出下列结论：如果一平面在与一超平面的交线上的一点垂直于该超平面，则它必定在整个直线上垂直于超平面。

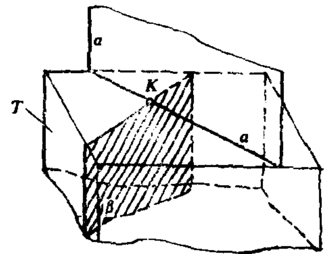


图2-8 平面与超平面垂直

以下定理可说明平面与超平面垂直的几何性质。

定理 1 若平面α沿直线a垂直于一个超平面，则在此超平面内垂直于a的任一平面必定绝对垂直于α；通过该超平面内一点而绝对垂直于α的任一平面都属于该超平面。

证：可设平面α为坐标平面，其方程为

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

α沿直线a垂直于超平面T，a，T的方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

$$x=0$$

在T内任一垂直于a的平面β，其方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

由此可见，$\beta \perp\!\!\!\!\!\!\smile \alpha$，通过T内一点$P_0(0,\ y_0,\ z_0,\ u_0)$绝对垂直于$\alpha$的平面$\gamma$的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x & y-y_0 & z-z_0 & u-u_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

因此，γ 属于超平面 T。

定理 2 若平面 α 沿直线 a 垂直于一超平面，则该超平面内通过 a 的任意平面都垂直于 α，即垂直于 α 且通过 a 或通过该超平面内不垂直于 a 的任意直线的平面都属于该超平面。

证：已知平面 α 沿直线 a 垂直于超平面 T，α、a、T 的方程如定理 1 证明所述。在 T 内任一通过 a 的平面 β，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ C_1 z + D_1 u = 0 \end{cases}$$

因此，$\beta \perp \alpha$。

图 2-9 应用综合法进行证明。在上述情况下，过 a 上任一点 K 作平面 $\theta \veebar \alpha$，θ 与 β 相交于直线 b，b 垂直于 a，因此 $\beta \perp \alpha$。

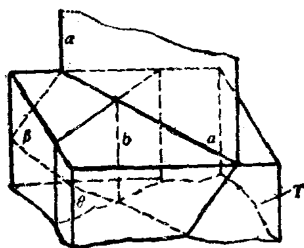


图2-9 平面沿直线垂直于超平面

定理 2 的第二部分证明如下：设另一平面 γ 垂直于平面 α，则 α 包含一条且仅有一条对 γ 垂直的直线 l，其方程为

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

l 与 γ 的交点为 $P_1(x_1,\ y_1,\ 0,\ 0)$，根据直线垂直超平面的定理 7（本章第二节），则 l 必定在超平面 T 中，T 的方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z & u \\ A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

（1）若平面 γ 通过直线 a，a 的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

由于 α、γ 均包含 a，又 $\alpha \perp \gamma$，因此 α 与 γ 相交于一直线 a，其交点 $P_1 = \left(0, \dfrac{C}{B}, 0, 0\right)$，即

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{C}{B}$$

从而可得 T 的方程为

$$Bx - A\left(y - \frac{C}{B}\right) = 0$$

因为 a 属于 Υ 面，Υ 面又属于T，把 a 的方程代入T，得 $A=0$，故 Υ 完全属于T。可见 Υ 完全属于 Σ_1。

（2）若 Υ 是通过T内而不垂直于 a 的任一直线 l_1

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y-y_0}{b_1} = \dfrac{z-z_0}{c_1} = \dfrac{u-u_0}{d_1} \end{cases}$$

由于 $l \perp \Upsilon$，则 l 必定垂直于 Υ 上的直线 l_1。l 和 l_1 的方向分别为 $(-B, A, 0, 0)$ 和 $(0, b_1, c_1, d_1)$，由于 $-B\cdot 0 + A\cdot b_1 + 0\cdot c_1 + 0\cdot d_1 = 0$，$Ab_1 = 0$，而 $b_1 \neq 0$，得 $A = 0$，因此T即为

$$x = x_1$$

平面 Υ 过点 P_1 和直线 l_1，其方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & z & u \\ 0-x_1 & y_0-y_1 & z_0 & u_0 \\ 0-x_1 & y_0+b-y_1 & z_0+c_1 & u_0+d_1 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}(x-x_1) + x_1[c_1(y-y_1) - b_1 z] = 0 \\ \begin{vmatrix} y_0-y_1 & u_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}(x-x_1) + x_1[d_1(y-y_1) - b_1 u] = 0 \end{cases}$$

可以看出，Υ 在超平面T内，T的方程为

$$x = x_1$$

则

$$\begin{cases} x_1[c_1(y-y_1) - b_1 z] = 0 \\ x_1[d_1(y-y_1) - b_1 u] = 0 \end{cases}$$

注意到 $b_1 \neq 0$，为使上式成为恒等式，必须 $x_1 = 0$，故超平面T的方程为

$$x = 0$$

所以 Υ 完全属于T。

定理3 如果两个超平面在点 K 与一已知平面垂直，它们必定相交于过点 K 而与已知平面绝对垂直的平面。

证：设超平面的方程 T_1、T_2 分别为

$$x = 0$$

$$Ax + By + Cz + Du = 0$$

T_1、T_2 在点 $K(0, 0, 0, 0)$ 处与平面 a 垂直，在 a 上与 T_1 垂直的直线 l_1，其方程为

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

在 a 上垂直于 T_2 的直线 l_2，其方程为

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{u}{D}$$

在 l_1、l_2 上取三个点：(0，0，0，0)、(1，0，0，0)、(A，B，C，D)，则 α 的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-0 & y-0 & z-0 & u-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 & 0-0 \\ A-0 & B-0 & C-0 & D-0 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & D \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

T_1、T_2的交平面α'为

$$\begin{cases} x = 0 \\ Ax+By+Cz+Du=0 \end{cases}$$

显然，α 与 α'为绝对垂直的两个平面。

定理 4 当一个超平面包含绝对垂直的两平面之一时，则必定垂直于另一平面。

证：设两个绝对垂直的平面 α 、α'的方程为

$$\begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

包含 α 的任一超平面T，其方程为

$$Cz+Du=0$$

显然，$\alpha'\perp T$。

定理 5 若一个平面垂直于一个超平面，则平面内任何垂直于它们交线的直线必定垂直于该超平面；任何通过已知平面上一点且与已知超平面垂直的直线完全属于该平面。

证：设已知平面 α 为

$$\begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

α 所垂直的超平面T，其方程为

$$x=0$$

设 α 与T的交线为 y 轴，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

垂直于 y 轴且在 α 平面的直线 l，其方程为

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

可见，$l \perp T$。

通过α上的点$P_0(x_0, y_0, 0, 0)$与T垂直的直线l_0，其方程为

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

显然，l_0完全属于平面α。

定理6 若平面与超平面垂直，则在超平面内与交线垂直的任何直线必定垂直于该已知平面；任何通过超平面内一点且与该已知平面垂直的直线完全属于该超平面。

证：设平面α与超平面T的方程分别为

$$\begin{cases} z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

α与T呈垂直相交，交线为y轴，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

在T内与y轴垂直的任一直线l，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \\ \dfrac{z - z_0}{C} = \dfrac{u - u_0}{D} \end{cases}$$

显然，$l \perp \alpha$。

通过T内一点$P_1(0, y_1, z_1, u_1)$与α垂直的直线l_1，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_1 \\ \dfrac{z - z_1}{C} = \dfrac{u - u_1}{D} \end{cases}$$

可见，l_1完全属于超平面T。

定理7 若直线与一超平面垂直，则通过该直线的任何平面必定垂直于该超平面。

证：如图2-10所示，直线m与超平面T垂直相交，交点为K，过K作平面α与T相交于a，在K点与α平面绝对垂直的平面β必在T内。根据平面垂直于超平面的定义，α垂直于T。

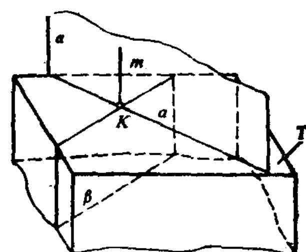


图2-10 直线垂直于超平面，通过直线的平面必定垂直于该超平面

定理8 已知超平面与一条直线不垂直，过该直线可以而且只可以作一个平面与已知超平面垂直。

证：设超平面T，其方程为

$$x = 0$$

与超平面不垂直的直线l，其方程为

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{u}{D}$$

则过 l 且与T垂直的平面 α 必定通过T在O（0， 0， 0， 0）处的法线 x， x 的方程为

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

故 α 的方程可写为

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & D \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} Cy-Bz=0 \\ Dy-Bu=0 \end{cases}$$

α 是唯一存在的。

定理 9 一条直线不在与已知平面绝对垂直的平面上，过此直线有一个且只有一个与已知平面垂直的超平面。

证：设已知平面 α，其方程为

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

与 α 绝对垂直的平面 α' 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases}$$

直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=\frac{u-u_0}{d}$$

l 不在 α' 上，即有 $a^2+b^2\neq 0$。

设超平面T，其方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D(u-u_0)=0$$

T过直线 l 且与 α 垂直，以下证明 $A:B:C:D$ 是唯一确定的。

因为 l 属于T，所以

$$Aa+Bb+Cc+Dd=0$$

α 与T的交线 a 的方程为

$$\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)-Cz_0-Du_0=0 \\ z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

在 a 上任一点 $P_1(x_1, y_1, 0, 0)$处，T的法线为 n，方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & z & u \\ A & B & C & D \end{matrix}\right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} B(x-x_1)-A(y-y_1)=0 \\ C(x-x_1)-Az=0 \\ D(x-x_1)-Au=0 \end{cases}$$

由于 n 在平面 a 中，故得 $C=0$，$D=0$。所以 $Aa+Bb=0$，注意到 $a^2+b^2\neq 0$，即 a、b 不同时为零，故 $A:B$ 是定比关系，即 $A:B:C:D$ 是唯一确定的，也即此超平面T是唯一存在的。

4. 两超平面垂直

定理 1　若两个超平面垂直，则在一个超平面内垂直于交平面的直线必定垂直于另一超平面；通过其中一超平面内的一点而与另一超平面垂直的任一直线完全属于第一超平面。

证：设在 $O-xyzu$ 体系中的两垂直超平面 T_1、T_2，其方程分别为

$$x=0$$

$$y=0$$

其交平面 a 的方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

在 T_1 内垂直于 a 的任一直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ z=z_0 \\ u=u_0 \end{cases}$$

由此可见，$l\perp T_2$。

过 T_1 中一点 $P_1(0, y_1, z_1, u_1)$与 T_2 垂直的直线 l_1，其方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ z=z_1 \\ u=u_1 \end{cases}$$

由此可见 l_1 属于 T_1。

定理 2　若一直线垂直于已知超平面，则包含该直线的超平面必定垂直于已知超平面。其证明与上述平面与超平面垂直的定理 7 类似。

定理 3　若三个超平面相交为一条直线，并且这三个超平面都垂直于第四个超平面，则该交线必定垂直于第四个超平面。

证：设三个超平面 T_1、T_2、T_3 的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z=0$$

$$A_3x+B_3y+C_3z=0$$

它们的交线 u，其方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

与这三个超平面都垂直的第四个超平面T，其方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$u = 0$$

显然，$u \perp T$。

定理 4 若两个超平面垂直，则在任一超平面中垂直于它们的交平面的平面垂直于另一超平面，并且任何通过其中一超平面的一条直线而垂直于另一超平面的平面完全属于第一个超平面，除非该直线本身与第二个超平面垂直。

证：设两超平面 T_1、T_2 的方程为

$$x = 0$$

$$y = 0$$

其交平面 α 为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

在 T_1 中垂直于 α 的平面 β 为

$$\begin{cases} x = 0 \\ Cz + Du = 0 \end{cases}$$

可见，$\beta \perp T_2$。

设 l 为 T_1 中的一条直线，其方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} = \dfrac{u - u_0}{d} \end{cases}$$

通过 l 且与 T_2 垂直的平面为 γ。l 与 T_2的交点为 $P_0\left(0,\ 0,\ z_0 - \frac{c}{b}y_0,\ u_0 - \frac{d}{b}u_0\right)$，在 P_0 处，T_2 的法线 n 为

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z - z_0 + \frac{c}{b}y_0 & u - u_0 + \frac{d}{b}u_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|_2 = 0$$

即

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = z_0 - \dfrac{c}{b}y_0 \\ u = u_0 - \dfrac{d}{b}u_0 \end{cases}$$

由于 γ 由 l 、n 唯一确定，且 l 、n 都在 T_1 中，所以 γ 完全属于第一个超平面 T_1。

定理 5 若一平面垂直于一个超平面，则任何包含该平面的超平面都垂直于已知超平面。

此定理的证明从略。

定理6 若两个相交的超平面垂直于一个已知超平面，则它们的交平面也必定垂直于已知超平面。

证：设垂直于已知超平面T（$x=0$）的两个超平面T_1、T_2的方程分别为

$$B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0$$

$$B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0$$

T_1、T_2的交平面α的方程为

$$\begin{cases} B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0 \\ B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0 \end{cases}$$

α与T的交线l的方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0 \\ B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0 \end{cases}$$

在l上任一点$P_0(0, y_0, z_0, u_0)$处，T的法线n的方程为

$$\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \\ u=u_0 \end{cases}$$

代入α方程，得

$$\begin{cases} B_1y_0+C_1z_0+D_1u_0+E_1=0 \\ B_2y_0+C_2z_0+D_2u_0+E_2=0 \end{cases}$$

即α包含T的法线n，因此$\alpha\perp$T。

第三节　多维空间中的平行问题

一、两空间的平行度

1. 平行的概念

从射影几何观点来看，所谓两几何元素平行，即它们相交于非固有元素。直线的非固有点决定直线的方向；平面的非固有直线决定平面的方位，方位的集合即是三维空间的非固有平面。在三维空间中，当两直线的非固有点重合，即两直线和非固有平面相交于一点时，两直线平行；当两平面的非固有直线重合，即两平面和非固有平面相交于同一直线时，两平面平行；当直线的非固有点属于平面的非固有直线时，直线与平面平行。

依此类推，在四维空间中，所有非固有平面的集合是四维空间的无穷远超平面；同样，任一n维空间都有一个（$n-1$）维非固有子空间。若两个（$n-1$）维子空间共有一个（$n-2$）维非固有子空间，则两个（$n-1$）维子空间平行。在n维空间中，根据不同情况分为完全平行和部分平行，可用“平行度”加以区别。

2. 两空间的平行度

设两空间的维数分别为p、q。当$p\geqslant q$，且$p+q>n$时，如两空间相交为r维的非固有子空间，则两空间平行，其平行度d_p为

$$d_p = \frac{r+1}{q} \tag{2-10}$$

若两个子空间的平行度$d_p = 1$，则称为完全平行或全平行；当$0 < d_p < 1$时，称为部分平行；当$d_p = \frac{1}{2}$时，称为半平行。

定理 在n维空间中，若一个（$n-1$）维子空间与另一个q维子空间平行，则两子空间必定完全平行。

证： 因S^{n-1}与S^q的交空间的维数为$r = n-1+q-n = q-1$，其中$q \leqslant n-1$，故S^{n-1}与S^q的平行度为

$$d_p = \frac{r+1}{q} = \frac{q}{q} = 1$$

设S^p与S^q是S^n中任意两个平行的子空间，且$p \geqslant q$，则S^p与S^q的平行度如表2-5和表2-6所示。

表2-5　当$n-1$为偶数$2k$时S^p与S^q的平行度d_p

d_p \ q / p	1	2	……	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	……	$2k-1$	k
$k+1$						$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k+1}$				
$k+2$					$\frac{1}{k-1}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k+1}$	$\frac{4}{k+2}$			
$k+3$				$\frac{1}{k-2}$	$\frac{2}{k-1}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k+1}$	$\frac{5}{k+2}$			
⋮			⋰	……	……	……	……	……	⋱		
$2k-1$		$\frac{1}{2}$	……	$\frac{k-3}{k-2}$	$\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{k}{k-1}$	$\frac{k-1}{k-2}$	……	$\frac{2k-2}{2k-1}$	
$2k$	1	1	……	1	1	1	1	1	……	1	1

当$r+1$与q是互为素数时，出现部分平行的空间的最少维数为$2q-r$。如$d_p = \frac{1}{2}$首先出现在S^4中，$d_p = \frac{1}{3}$首先出现在S^6中。

若平面S_1^2、S_2^2无公共固有点，则它们在S^3中共有一非固有直线，$d_p = 1$；在S^4中共有一非固有点，$d_p = \frac{1}{2}$；在S^5中没有共有元素，$d_p = 0$，即是毅斜的。若超平面S_1^3、S_2^3无公共固有点，则它们在S^4中共有一非固有平面，$d_p = 1$；在S^5中共有一非固有直线，$d_p = \frac{3}{4}$；在S^6中共有一非固有点，$d_p = \frac{1}{3}$；在S^7中没有共有点，$d_p = 0$，即是毅斜的。

3. 两个平行超平面被第三个超平面所截的截口平行度

定理1 若S^p、S^q的平行度为$(r+1)/q$，它们被S^K所截，则截口的平行度d_p为$(k+2r-p-q+1)/(k+r-p)$。

表2-6　当$n-1$为奇数$2k+1$时S^p与S^q的平行度d_p

d_p \ q / p	1	2	....	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	....	$2k$	$2k+1$
$k+1$							$\frac{1}{k+1}$				
$k+2$						$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k+1}$	$\frac{3}{k+2}$			
$k+3$					$\frac{1}{k-1}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k+1}$	$\frac{4}{k+2}$			
⋮				⋰	....	....	....	....	⋱		
$2k$		$\frac{1}{2}$	....	....	$\frac{k-2}{k-1}$	$\frac{k-1}{k}$	$\frac{k}{k+1}$	$\frac{k+1}{k+2}$	....	$\frac{2k-1}{2k}$	
$2k+1$	1	1	....	1	1	1	1	1	....	1	1

证：因S^p、S^q的平行度为$(r+1)/q$，则它们有一个公共的非固有的子空间S^r_∞，且没有其他有限公共点，由于$n=p+q-r$，即S^p、S^q同包含于S^n即S^{p+q-r}中。在S^{p+q-r}中，S^k与S^p相交于S^{k+r-q}，与S^q相交于S^{k+r-p}。由于S^{k+r-q}与S^{k+r-p}同处在S^k中，因此它们的交空间为$S^{k+2r-p-q}$，$S^{k+2r-p-q}$也同属于S^p、S^q。由前述S^p、S^q只有公共的非固有子空间S^r_∞，因此$S^{k+2r-p-q}$属于S^r_∞，所以S^{k+r-q}与S^{k+r-p}平行，根据定义可得其平行度为$(k+2r-p-q+1)/(k+r-p)$。分子相当于式(2-10)的分子$r+1$，分母相当于式(2-10)的分母q。

推论：若S^p、S^q完全平行，则它们的截口也必定完全平行。

证：因S^p、S^q完全平行，则$(r+1)/q=1$，即$r=q-1$，代入截口平行度公式即得$(k+2r-p-q+1)/(k+r-p)=1$，即为完全平行。

定理 2　设在S^n中S^p、S^q的交空间为S^r,则S^n中任意一个S^k与S^r的平行度为$(m+1)/r$，$k\geqslant r$，则S^k与S^p、S^q的交空间也平行，且平行度为$(m+1)/(k+r-p)$。

证：因S^k与S^r只有一个公共的非固有超平面S^m_∞,而没有有限的公共点,所以S^k、S^p、S^q也没有有限的公共点，而只有公共的S^m_∞。根据相交公式得知，在S^n中S^k与S^p的交空间为S^{k+r-q}，与S^q的交空间为S^{k+r-p}，因为$n=p+q-r$，$p>q$，所以$k+r-p<k+r-q$，由定义得知，两截口的平行度为$(m+1)/(k+r-p)$。

4. 四维空间中的平行度

在四维空间中，$n=4$，$n-1$为奇数，其平行度见表2-7（根据表2-6得出）。

由表2-7可看出，在S^4中，除两个平面的平行是半平行外，其余皆为完全平行。半平行的两个平面只有一个公共方向，因此在一个平面内只有一个方向的一系列平行线与另一平面内的一系列平行线

表2-7　四维空间中的平行度

d_p \ q / p	1	2	3
1			1
2		$\frac{1}{2}$	1
3	1	1	1

平行。

在 S^4 中两平面的全平行和半平行的区别如表 2-8 所示。

表2-8 S^4中两平面全平行与半平行的区别

全平行	半平行
① 两平面属于同一个超平面 ② 两平面共有一非固有直线 ③ 一平面内的每条直线都可以在另一平面内找出一组与之平行的直线	① 两平面不属于同一个超平面 ② 两平面共有一非固有点 ③ 在两平面内只能找出一组互相平行的直线

二、四维空间中的平行直线和平行平面

定理 1 垂直于同一超平面的两条直线互相平行。

定理 2 垂直于两平行直线之一的超平面必定垂直于另一条直线。

显然，上述两定理是成立的，其证明从略。

定理 3 若一超平面与两个平行平面之一相交，且不包含另一平面，则该超平面必定与另一平面相交，而且两交线互相平行。

证：设两平行平面 α_1、α_2 的方程为

$$\begin{cases} z = z_1 \\ u = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_2 \\ u = u_2 \end{cases}$$

与 α_1 相交的任一超平面T，其方程为

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0$$

式中 $A^2 + B^2 \neq 0$

α_1 与T的交线 l_1 的方程为

$$\begin{cases} Ax + By + Cz_1 + Du_1 + E = 0 \\ z = z_1 \\ u = u_1 \end{cases}$$

因 α_2 不包含在T中，显然，α_2 与T也相交，交线 l_2 的方程为

$$\begin{cases} Ax + By + Cz_2 + Du_2 + E = 0 \\ z = z_2 \\ u = u_2 \end{cases}$$

由此可以看出，$l_1 /\!/ l_2$。

定理 4 若一个平面与两个平行平面之一相交于一点，则它与另一个平面也必定相交于一点。

证：设两个平行平面 α_1、α_2 的方程为

$$\begin{cases} z = z_1 \\ u = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_2 \\ u = u_2 \end{cases}$$

任一平面α的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0 \end{cases}$$

若α与α_1相交于一点，则$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

显然，α与α_2也只相交于一点。

定理 5 与已知平面绝对垂直的两个平面必定互相平行。

证：设已知平面α，其方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

依次与α在点$P_1(0, 0, z_1, u_1)$、$P_2(0, 0, z_2, u_2)$处绝对垂直的平面α_1、α_2的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z-z_1 & u-u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

$$\left\|\begin{matrix} x & y & z-z_2 & u-u_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\alpha_1: \begin{cases} z=z_1 \\ u=u_1 \end{cases}$$

$$\alpha_2: \begin{cases} z=z_2 \\ u=u_2 \end{cases}$$

由此可见，$\alpha_1 /\!/ \alpha_2$。

定理 6 与两平行平面之一绝对垂直的平面必定与另一平行平面绝对垂直。

证：设两平行平面α、β的方程为

$$\begin{cases} z=0 \\ u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=z_0 \\ u=u_0 \end{cases}$$

设平面γ在点$P_0(x_0, y_0, 0, 0)$处绝对垂直于α，γ的方程为

$$\left\|\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

由此可见，在点$P(x_0, y_0, z_0, u_0)$处，$\gamma \veebar \beta$。

定理 7 若两个平面分别与两个平行平面绝对垂直，则两平面也必定互相平行；分别与两个绝对垂直的平面平行的两个平面也必定绝对垂直。

证：设两平行平面α_1、α_2的方程为

$$\begin{cases} z = z_1 \\ u = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_2 \\ u = u_2 \end{cases}$$

与α_1、α_2绝对垂直的平面α_1'、α_2'，其方程应为

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$$

由此可见，$\alpha_1' \parallel \alpha_2'$。

又设两绝对垂直的平面α、α'，其方程为

$$\begin{cases} z = z_0 \\ u = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

设$\beta \parallel \alpha$，$\beta' \parallel \alpha'$，则β、β'的方程分别为

$$\begin{cases} z = z_1 \\ u = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

显然，$\beta \veebar \beta'$。

三、四维空间中直线、平面、超平面之间的平行问题

定理 1 若一直线与已知超平面上一直线平行，则该直线必定与超平面平行。若一平面不属于已知超平面而与超平面内的一个平面平行，则该平面必定与超平面平行。

证：设超平面 T 为

$$x = 0$$

T 上一直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

平行于 l 的直线 l_1 的方程为

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

T的法线方向$\vec{v}(1,0,0,0)$，l_1的方向为$\vec{e}(0,0,0,1)$，因此$\vec{v}\vec{e}=0$，即$l_1 /\!/ T$。

又设超平面T为

$$x = 0$$

T中一平面α的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

平行于α的平面α_1的方程为

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

T的法线方向$\vec{v}(1,0,0,0)$与$(1,0,0,0)$、$(0,1,0,0)$线性相关，因此$\alpha_1 /\!/ T$。

定理 2 若直线与超平面平行，则通过该直线的任何平面与超平面的交线必定与该直线平行。

证：设已知超平面T和直线l的方程分别为

$$x = 0$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

设$P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$是直线l外的任一点，过l和P_0的平面α的方程为

$$\left\| \begin{matrix} x - x_1 & y & z & u \\ x_0 - x_1 & y_0 & z_0 & u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} z_0 y - y_0 z = 0 \\ y_0(x - x_1) - (x_0 - x_1)y = 0 \end{cases}$$

α与T的交线l_1的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$$

式中 C_1、C_2为常数，因此$l_1 /\!/ l$。

定理 3 若一平面与超平面平行，则通过该平面的任何超平面与已知超平面的交平面必定与该平面平行。

此定理的证明与定理 2 的证明类似。

定理4 若一直线与超平面平行，则通过属于超平面的任一点而与已知直线平行的直线完全属于该超平面。

证：设直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

与 l 平行的超平面T的方程为

$$x = 0$$

经过T内一点 P_1（0，y_1，z_1，u_1）与 l 平行的直线 m 的方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

由此可见，m 属于T。

定理5 若一平面与超平面平行，则通过属于超平面的任一点而与已知平面平行的平面或直线完全属于该超平面。

此定理的证明与定理4的证明类似。

定理6 垂直于同一直线的两个超平面互相平行。

证：设已知直线 l 的方程为

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

与 l 垂直的超平面 T_1、T_2，其方程分别为

$$x = x_1$$

$$x = x_2$$

显然，$T_1 /\!/ T_2$。

定理7 若两个平行超平面之一垂直于一直线，则另一超平面也与该直线垂直。

证：超平面 T_1、T_2 的方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1u + E_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2u + E_2 = 0$$

因 $T_1 /\!/ T_2$

则
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

与 T_1 垂直的直线 l，其方程为

$$\frac{x - x_0}{A_1} = \frac{y - y_0}{B_1} = \frac{z - z_0}{C_1} = \frac{u - u_0}{D_1}$$

由于 $A_1:A_2 = B_1:B_2 = C_1:C_2 = D_1:D_2$，故 $l \perp T_2$。

定理8 过不属于已知超平面的一点能够且只能作一超平面平行于已知超平面。

证：设已知超平面T的方程为 $x = 0$，不属于T的点 P_0（x_0，y_0，z_0，u_0），过 P_0 作T的平行超平面 T_1，其方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D(u-u_0)=0$$

因 $T_1 /\!/ T$，则 T_1 的法向（A，B，C，D）与T的法向（1，0，0，0）成比例，故 $B=0$，$C=0$，$D=0$。T_1 的方程为：$A(x-x_0)=0$，即 $x=x_0$。由此可见，T_1 是唯一存在的。

定理9 若一平面与两平行超平面相交，或一个超平面与两平行平面相交，则所得两交线互相平行；若一个超平面与两平行超平面相交，则所得两交平面互相平行。

证：已知平行超平面T、T_1，其方程分别为

$$x=0$$

$$x=x_1$$

已知平面 α 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0 \end{cases}$$

α 与T、T_1 的交线为 l、l_1，其方程分别为

$$\begin{cases} x=0 \\ B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0 \\ B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=x_1 \\ B_1y+C_1z+D_1u+E_1'=0 \\ B_2y+C_2z+D_2u+E_2'=0 \end{cases}$$

显然，$l /\!/ l_1$。

本定理其他内容也可用类似方法证明。

定理10 若过一点而不共面的三条直线分别平行于另外三条过一点而不共面的直线，则两束直线确定同一超平面或平行的两个超平面。若一直线与一平面相交，且分别平行于另一相交直线和平面，则它们确定同一超平面或平行的两个超平面。

证：设两点$P_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$、$P_2(x_2, y_2, z_2, u_2)$，过每一点的三条直线都分别平行于 $\vec{l}_1(A_1、B_1、C_1、D_1)$、$\vec{l}_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$ 和$\vec{l}_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$。这两束直线确定的超平面分别为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & u-u_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 & u-u_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}=0$$

展开上述两式，可以看出两式相应的各项系数都相等。因此 $T_1 /\!/ T_2$，若 P_2 属于 T_1，则 T_1、T_2 是同一超平面。

当一直线与一平面相交，且分别平行于另一相交直线和平面时，可通过交点在平面上取

两条直线，分别平行于另一平面上过交点的两条直线。

第四节　多维空间中的距离与角度

一、多维空间中两个超平面（空间）的距离

多维空间中两个超平面的距离有三种情况。

1. 完全平行的两个超平面的距离

设两个完全平行的空间 S^p、S^q 同处于 S^{p+1} 空间中（$p \geqslant q$），两空间没有公共固有点，而且相交于非固有空间 S_∞^{q-1}。在 S^{p+1} 中通过任一点 O 有唯一直线 l 垂直于 S^p、S^q，公垂线 l 与 S^p、S^q 的交点为 A、B，AB 即为 S^p、S^q 的距离。

在四维空间中，除不共超平面的两个平行平面外，所有的平行问题都是完全平行，两平行空间的公垂线的真实长度即为两空间之间的距离。

2. 部分平行的两空间的距离

设部分平行的两个空间 S^p、S^q。共处于 S^{p+q-r} 中，$p \geqslant q$ 且 $r < q-1$（图 2-11），当 S^p、S^q 没有公共固有点时，则 S^p、S^q 相交于 S_∞^r，其平行度为 $(r+1)/q$，S^p 和 S_∞^{q-1} 确定 $S_1^{p+q-r-1}$，它包含 S^p 且完全平行于 S^q；S^q 和 S_∞^{p-1} 确定 $S_2^{p+q-r-1}$，它包含 S^q 且完全平行于 S^p。显然，$S_1^{p+q-r-1}$、$S_2^{p+q-r-1}$ 完全平行。$S_1^{p+q-r-1}$、$S_2^{p+q-r-1}$ 共有 $S_\infty^{p+q-r-2}$，并且无公共固有点。S^p 与 $A'_{0\infty}$（$S_{1\infty}^{p+q-r-2}$ 的绝对极点）确定 S^{p+1}，它与 $S_2^{p+q-r-1}$ 相交于 S_0^p，与 S^q 相交于 S_2^{r+1}。同理，S^q 与 $B'_{0\infty}$（$S_{2\infty}^{p+q-r-2}$ 的绝对极点）确定 S^{q+1}，它与 $S_1^{p+q-r-1}$ 相交于 S_0^q，与 S^p 相交于 S_1^{r+1}，由于 S_1^{r+1}、S_2^{r+1} 空间都包含 S_∞^r，因此 S_1^{r+1}、S_2^{r+1} 是完全平行的。由此可得出结论：若两个超平面平行，且有一个非固有的公共的 r 维空间，则两个超平面各有一个唯一的（$r+1$）维超平面，这两个（$r+1$）维超平面是完全平行的。

在四维空间中不属于同一超平面的两个平面的平行为部分平行（平行度为 1/2，即半平行）。部分平行的两个平面共有一个非固有点。在这两个平面内，只有通过一个非固有点的直线才能相互平行。在这些相互平行的直线中，有一对直线间的距离为最小，这就是部分平行的两个平面间的最短距离。

如图 2-12 所示，α 与 α_1 为部分平行平面，它们共有一个非固有点 O_∞，l 是 α 上任一直线，l_1 是 l 在 α_1 上的投影，l、l_1 的公垂线为 AA_1，s、s_1 为过 A、A_1 的一对平行直

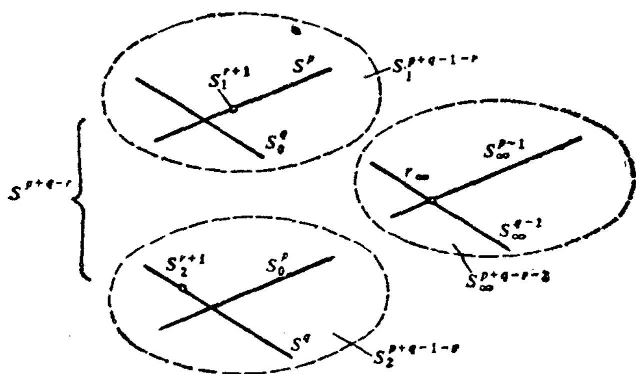


图2-11　多维空间中两部分平行空间的最短距离

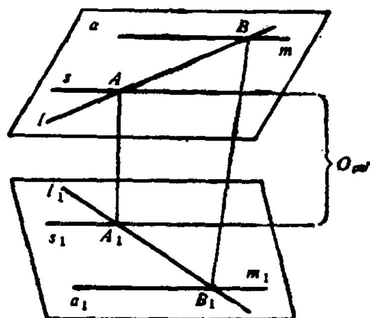


图2-12　四维空间中两部分平行平面的最短距离

线，具有一个公共非固有点 O_∞，s、s_1 即为最小距离的一对平行线，也即确定了 α 与 α_1 间的距离。其理由是在 α_1 上任取一点 B，过 B 作 $m \parallel s$，从 B 向 α_1 作垂线，垂足为 B_1，过 B_1 作 $m_1 \parallel s_1$，显然，m 与 m_1 也是 α 与 α_1 上过非固有点 O_∞ 的一对平行线，可以看出，$BB_1 > AA_1$。因此在部分平行的两个平面之间存在着距离最小的一对平行线 s 与 s_1，它们之间的距离即为部分平行的两平面间的距离。

3. 无公共固有点和非固有点的两空间的最短距离

设 S^p、S^q 为无公共固有点和非固有点的两空间（图 2-13），其平行度与关联度均为零。S^p 与 S^q 同处在 S^{p+q+1} 中，S_∞^{p-1}、与 S_∞^{q-1} 分别是它们的非固有空间，也没有公共点，并共同包含在 S_∞^{p+q} 中。过 S^p 内任一点作 $S_0^q \parallel S^q$，过 S^q 内任一点作 $S_0^p \parallel S^p$，则 S^p 与 S_∞^{q-1} 决定 S_1^{p+q} 空间，它包含 S^p 且完全平行于 S^q。同样，S^q 与 S_∞^{p-1} 决定 S_2^{p+q} 空间，它包含 S^q 且完全平行于 S^p（图 2-13）。S_1^{p+q} 与 S_2^{p+q} 的非固有空间分别为 $S_{1\infty}^{p+q-1}$、$S_{2\infty}^{p+q-1}$，两者同时包含 S_∞^{p-1}、S_∞^{q-1}，因此都与 S_∞^{p+q} 重合。所以 S_1^{p+q} 与 S_2^{p+q} 完全平行，S_1^{p+q} 与 S_2^{p+q} 之间的距离决定了 S^p 与 S^q 之间的距离。

在四维空间中，两条不共面的直线以及不共超平面的直线和平面间的距离就可按照这种情况确定。

如图 2-14 所示，直线 l 与平面 α 不属于同一超平面，两者不相交，从 l 上 A、B、……各点向平面 α 作垂线，其中最短的一条垂线的长度即为 l 与 α 间的距离。这些垂线的垂足 A_1、B_1、……即为 l 上各点在 α 上的投影。作 α 的绝对垂直平面 β_1、β_2、……，求出与 α 的交点，即得 A_1、B_1、……，而这些垂足的连线即为 l 在 α 上的投影 l_1，因此 l 与 α 的距离可归结为 l、l_1 两交叉直线间的距离。

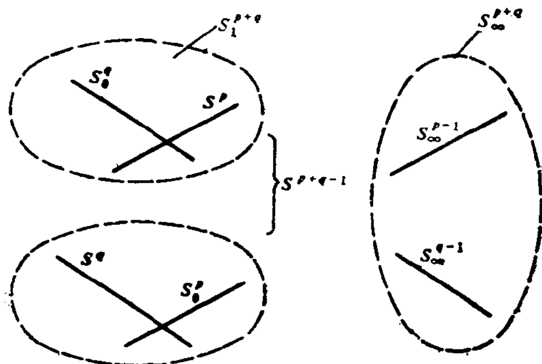


图2-13　无公共固有点和非固有点的两空间的最短距离

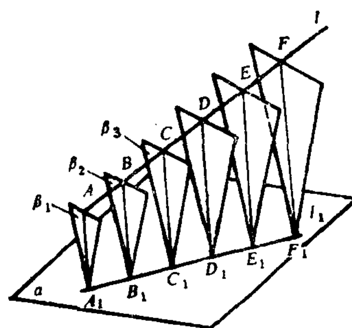


图2-14　四维空间中不共超平面的直线与平面的距离

二、多维空间中两个超平面（空间）之间的角度

1. 四维空间中两平面之间的角度

设两平面 α、β 不在同一超平面内，因此两平面相交于一点 O（图 2-15 a）。又设 α_∞ 和 β_∞ 分别为 α、β 的非固有直线。在一般情况下，α_∞ 和 β_∞ 不相交，α_∞、β_∞ 的绝对极线为 α'_∞、β'_∞（图 2-15 b）。若 α、β 是实的，则 α_∞ 与 α'_∞ 不相交；若 α_∞ 与 β'_∞ 或 α'_∞ 与 β_∞ 相交，则这两个平面是半垂直；若 α_∞ 与 β'_∞ 或 α'_∞ 与 β_∞ 重合，则这两个平面完全垂直。在一般情况下，α_∞、β_∞、α'_∞、β'_∞ 是四条交叉直线。由几何学得知，可以有两条直线 γ_∞、γ'_∞ 与四条交叉直线相交，因此 γ_∞、γ'_∞ 可视为与 α、β 半垂直的两个平面 γ_1、γ_2 的非固有直线，即 γ_1、γ_2

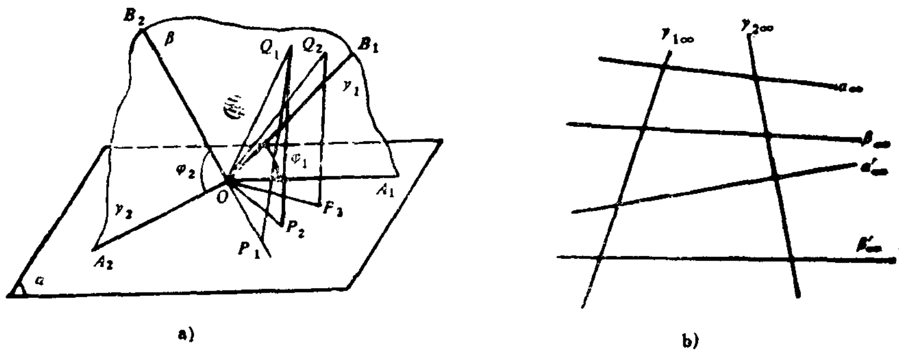


图2-15 四维空间中两平面之间的角度

是 α、β 两个公共垂直平面。γ_1、γ_2 与 α、β 的交线形成两个角，即 $\angle B_1OA_1=\varphi_1$ 和 $\angle B_2OA_2=\varphi_2$。φ_1、φ_2 即是两平面 α、β 的最小角和最大角。

其证明如下：设 OP_1 是 α 上的任意直线，过 OP_1 的一个任意平面交 β 于 OQ_1，过 OQ_1 的平面与 α 正交于 OP_2，由此可在 β 上得到 OQ_1、OQ_2、……等一系列直线。显然，$\angle P_1OQ_1>\angle Q_1OP_2>\angle P_2OQ_2>\cdots\cdots$，$\angle P_1OQ_1$、$\angle P_2OQ_2$、……趋向于最小的有限值，即 $\angle A_1OB_1=\varphi_1$，同时也可得到一个最大的有限值，即 $\angle A_2OB_2=\varphi_2$，φ_1、φ_2 即为平面 α、β 之间夹角的最小值和最大值。若 $\varphi_1=0$，则 OA_1 与 OB_1 重合，两平面相交于直线；若 $\varphi_1=\varphi_2=0$，则两平面重合；若 $\varphi_1=\varphi_2$，则两平面是等斜的；若 $\varphi_2=90^\circ$，则两平面半垂直；若 $\varphi_1=\varphi_2=90^\circ$，则两平面绝对垂直。

2. 多维空间中两超平面间的角度

为了论述两个超平面在度量上的不变数，现举例说明如下：

（1）在 S^2 中的两直线 l、m，当 l 与 m 平行时，它们之间有一个距离；相交时，有一个夹角。

（2）在 S^3 中的两直线 l、m，有一个最短距离和一个夹角。

（3）在 S^3 中的两平面 α、β，当 α 与 β 相交时，它们之间有一个夹角；当平行时，有一个距离。

（4）在 S^4 中的两平面 α、β 有两个夹角。

（5）在 S^5 中的两平面 α、β 交叉，它们之间有一个距离和两个夹角。

由此类推：在 S^{2p} 内的两个超平面 S_1^p、S_2^p 有一公共点，则有 p 个不变量，即全部为 p 个夹角；如在 S^{2p+1} 内的两个超平面 S_1^p、S_2^p 没有公共点，则有 $p+1$ 个不变量，即有 p 个夹角和一个距离，以上称为两个超平面在度量上的不变量。对于两空间 S^p、S^q 不同的相交情况讨论如下：

（1）如两空间 S^p、S^q（$p\geqslant q$）的交空间为 S^{q-1}（图 2-16），两空间处在 S^{p+1} 中，如 S^{q-1} 不单纯是个点，则过 S^{q-1} 上的任一点可作与之绝对垂直的空间 S^{p-q+2}。S^{p-q+2} 分别与 S^q、S^p 相交于 S^1 和 S^{p-q+1}，S^1 与 S^{p-q+1} 之间的夹角即为 S^p、S^q 之间的夹角（图 2-16 a）。为求 S^1 与 S^{p-q+1} 之间的夹角，在 S^{p-q+1} 中必定有唯一的 S^{p-q} 绝对垂直于 S^1，并有唯一的直线 l 垂直于 S^{p-q}，则 S^1 与 l 的夹角即为 S^1 与 S^{p-q+1} 的夹角（图 2-16 b）。

（2）如两空间 S^p、S^q（$p>q$）的交空间为 S^0，即相交为一点，S^p、S^q 位于 S^{p+q} 中

（图 2-17）。过 S^q 中的一些点 A、B、……作 S^p 的垂线，其垂足 A_1、B_1……的集合为 S_0^q。S^{2q} 包含 S^q 和 S_0^q，过 S_0^q 中的每一点作 S^{2q} 的垂线，这些垂线在S^{p+q}中的集合即为 S^p，因此，当已知 S^q、S_0^q 时即可确定 S^p。根据确定不变量的规则，S^q 与 S_0^q之间有 q 个角，也即 S^p、S^q 之间有 q 个角（图2-17 a）。

图2-16　两空间相交角度情况之一的求法

求 q 个角的步骤如下（图 2-17 b）：

1）作一平面 P_1OQ_1垂直于S^p、S^q，该平面与 S^p、S^q分别相交于OP_1 和 OQ_1，则$\angle P_1OQ_1 = \theta_1$ 是 S^p 和 S^q 之间的第一个最小夹角。

2）在 S^p 中有唯一的 $S^{p-1} \perp OP_1$，在 S^q 中有唯一的 $S^{q-1} \perp OQ_1$。作平面P_2OQ_2垂直于 S^{p-1} 和S^{q-1}，$\angle P_2OQ_2 = \theta_2$ 即是 S^{p-1} 和 S^{q-1} 之间的一个夹角。现证明 θ_2 也是 S^p、S^q 之间的第二个最小夹角。

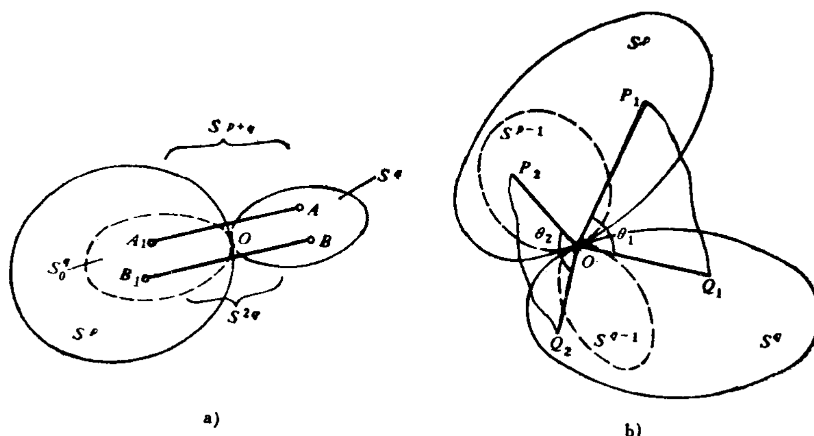


图2-17　两空间相交角度情况之二的求法

因为 P_1OP_2 属于 S^p，$P_1OQ_1 \perp S^p$，所以 $P_1OQ_1 \perp P_1OP_2$。又因为 $S^{p-1} \perp OP_1$，所以 $OP_2 \perp OP_1$，由三维几何中的垂直定理可得 $OP_2 \perp P_1OQ_1$。同样可得 $OQ_2 \perp P_1OQ_1$，所以 $P_2OQ_2 \perp P_1OQ_1$。已知 $P_2OQ_2 \perp S^{p-1}$，$P_2OQ_2 \perp OP_1$，所以 $P_2OQ_2 \perp S^p$，同样可得 $P_2OQ_2 \perp S^q$，因此 θ_2 是 S^p、S^q 之间的第二个最小夹角。

3）继续上述过程，当得到（$q-1$）个夹角后，在 S^p 中有空间 $S^{p-(q-1)}$，在 S^q 中有直线 l，于是 S^{p-q+1} 与 l 之间夹角为 S^p、S^q 之间的第 q 个最小夹角。

（3）如两空间 S^p、S^q 的交空间为 S^r（$p > q > r$），S^p、S^q、S^r 均包含于 S^{p+q-r} 中（图 2-18）。设 S_0^q 是 S^q 在 S^p 上的正投影，则 S_0^q 与 S^q 的交空间为 S^r。于是 S^{q-r}、S_0^{q-r} 互相垂直且相交于一点，它们确定空间 $S^{2(q-r)}$，即两个 S^{q-r} 在 $S^{2(q-1)}$中相交于一点，根据上述原则可得（$q-r$）个夹角(图 2-18 a))。

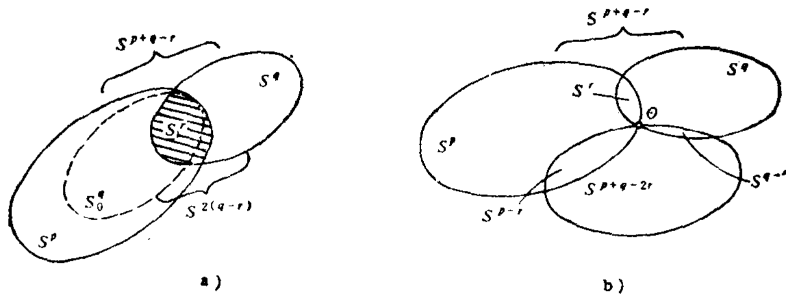


图2-18　两空间相交角度情况之三的求法

（$q-r$）个夹角的求法如下（图 2-18 b）：过 S^r 内任一点 O 有唯一的 $S^{p+q-2r} \perp S^r$，且 S^{p+q-2r} 与 S^p、S^q 分别相交于 S^{p-r}、S^{q-r}、S^{p-r}、S^{q-r} 相交于一点。S^p 与 S^q 之间的夹角可以用 S^{p-r} 和 S^{q-r} 之间的夹角来表示。因为 $p>q$，所以在 S^{p-r} 和 S^{q-r} 之间有（$q-r$）个夹角，其求解步骤与图 2-17 所示相同。

第三章　多维空间中的投影

第一节　多维空间中的中心投影与平行投影

一、多维空间中的中心投影

在 n 维空间 S^n 中，取点 C 作为投影中心，A 为任意点，将 A 点投射到投影超平面 S^p 上（图 3-1）。为了使 A 在 S^p 上的投影仍为一点 A_1，则必须过 A 作一投射空间 S^{n-p}，由于 S^{n-p} 包含 A 点，因此投影中心 C 应为 S^{n-p-1}。如投影中心为点 S^0，则投射空间为 S^1，投影超平面应为 S^{n-1}。又如将 A 点投影到二维投影面 S^2 上，即 $p=2$，则投影中心应为 S^{n-3}。

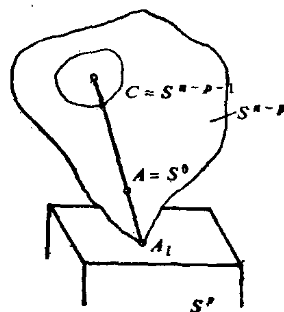


图3-1　多维空间中的中心投影

在四维空间中，如果投影中心为点，则投影空间为 S^1，投影超平面应为 S^3，即将四维空间中的 A 点投影到三维空间（超平面）上，而不能直接投影到投影平面上。如果投影中心为直线 S^1，则投射空间为 S^2，它与投影平面的交点为 S^0，即点的投影仍为点。

在四维空间中，投影中心为点或直线的中心投影分别称为四维点中心投影或四维线中心投影，其具体作图方法见第四章第六节和第七节。

二、多维空间中的平行投影

当投影中心 C 是非固有元素时，其投影为平行投影，不同点的投影所形成的投射空间是全平行的。由于投影中心是非固有的，因此在 n 维空间中非固有元素的投影即为非固有元素本身。例如两空间 S^p、S^q 是平行的，其平行度为 $(r+1)/q$，由于两空间在无穷远处的交为 S^r，它们没有公共的固有点，因此它们的投影也是平行的，平行度也为 $(r+1)/q$。即超平行体的投影仍为超平行体。

三、多维空间中的正投影

正投影是平行投影的特殊情形。这时，非固有的投影中心S_∞^{n-p-1}是投影超平面 S^p 的绝对极。点投影时形成的投影空间S^{n-p}绝对垂直于投影超平面 S^p，因此投影空间也是全平行的。如在平行投影中一样，超平行体的正投影仍为超平行体。

四、投影中的降维原则

前面已叙述，在四维空间中，如果投影中心为点，则投影时必须先将几何元素投影到超平面 S^3 中，然后将 S^3 中的投影再次投影到投影面 S^2 上，这样就可将几何元素的图象表达在平面上。将此原理推广到 n 维空间中，也即在 n 维空间中，如投影中心为点，必须将几何元素首先投影到 $n-1$ 维空间中，然后再投影到 $n-2$ 空间，依此类推，一直投影到二维投影面 S^2 上。由此可见，在投影过程中必须遵守“降维原则”。如果投影中心为直线，则同样应首先将几何元素投影到 $n-2$ 维空间，然后再投影到 $n-3$ 维空间，依此类推，一直投影到 S^2 上。

第二节 四维空间中的轴测投影

一、四维空间坐标体系在三维轴测空间中的投影

如图 3-2 所示为四维空间中四根互相垂直的轴组成的坐标体系 $O-xyzu$。若向三维轴测空间T进行正投影，投影方向为OO_1，得三维投影$O_1-x_1y_1z_1u_1$，$O-xyz$ 与T的交平面为 τ。由于 u_1 轴与 τ 属于同一个三维空间T，因此 u_1 轴与 τ 平面必定相交，其交点为 A_1。过 A_1 作 $A_1A /\!/ O_1O$，$A_1B_1 /\!/ u$ 轴。由于 $u \perp O-xyz$ (Σ_4)，所以 $A_1B_1 \perp \Sigma_4$。因$OO_1 \perp$T，所以 $A_1A \perp$T。又 $u \perp \Sigma_4$，所以 uu_1 平面绝对垂直于 τ。因 u_1 轴又属于T，所以 $u_1 \perp \tau$。由此可得以下几何性质：在四维空间中，任一坐标轴在轴测空间T中的正投影与不属于此轴的三维坐标空间与轴测空间的相交平面垂直。

二、变形系数

首先分析各坐标轴的变形系数。如图 3-3 所示，设 α、β、γ、δ 分别为各坐标轴与其投影的夹角，α_1、β_1、γ_1、δ_1 为相应的余角，根据四维空间的方向余弦的性质可得：

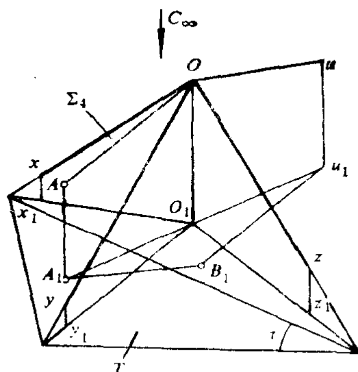


图3-2 四维空间坐标体系的轴测投影

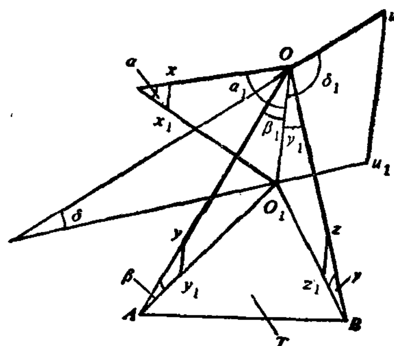


图3-3 轴向变形系数

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\delta_1 = 1$$

在正等轴测投影中，$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1$，所以

$$4\cos^2\alpha_1 = 1$$

由此可得

$$4\cos^2\alpha = 3$$

即

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

其次分析各坐标轴的轴间角。任取两坐标轴，如图 3-3 中的 y、z 轴，yz 坐标面与轴测空间T相交于直线 AB，因$\angle yOz = 90^\circ$，$OA = OB = 1$，因此在直角三角形 AOB 中 $AB = \sqrt{2}$，$O_1A = O_1B = \sqrt{3}/2$，$\angle y_1O_1z_1 = 109^\circ 28' 16''$。

三、三维正等轴测投影在二维轴测面上的正投影

为了便于作图及计算，应尽可能使轴向变形系数相等。如取四个轴向变形系数相等，可

将三维正等轴测投影置于一正方体中（图 3-4），向一个侧面（π 面）进行正投影，则 O_1—$x_1y_1z_1u_1$ 在 π 面上的投影为 O_2—$x_2y_2z_2u_2$。可以看出，其中 x_2 轴与 u_2 轴、y_2 轴与 z_2 轴分别重合，因此图形无直观性。

又如取三个轴向变形系数相等，可将三维等轴测投影置于一正四面体中（图 3-5）。这时如取轴测投影面 π 与 z_1 轴垂直，则 x_1、y_1、u_1 轴的变形系数相等，但 z_2 轴为一点，图形也无直观性。

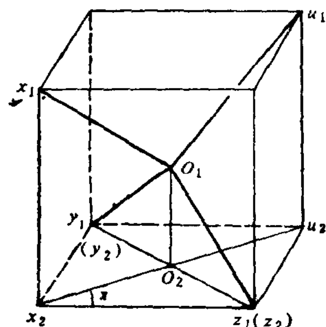


图3-4　四个轴向变形系数相等的情况

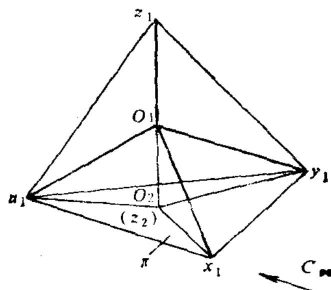


图3-5　三个轴向变形系数相等的情况

因此，最佳方案就是取两轴的变形系数相等，即将三维正轴测投影按正二测投影的要求投影到二维平面上，这时得到的二维平面图形称为四维正二等轴测投影。

正二等轴测投影有多种方案，经过分析比较，图 3-6 所示为最佳方案。其中，确定 u 轴的方向为 $\beta=45°$，另外两个轴间角分别为 tg 19.1916° ≈ 7/20，tg21.4251 ≈ 7/18。作图时以两直角边之比为 7/20 和 7/18 作出 y 轴和 x 轴，z 轴呈铅垂线位置。各轴变形系数：x 轴为 1/2，y 轴为 1，z 轴为 1，u 轴为 2/3。以上数据的误差都在 0.5% 左右，故精确度较高。

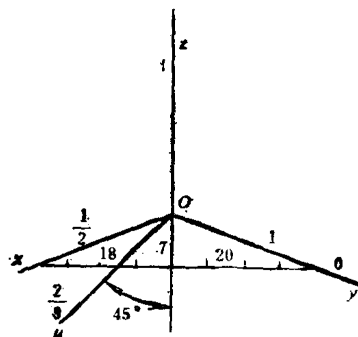


图3-6　四维正二等轴测投影的轴间角与变形系数

第三节　四维空间中的正投影

一、投影过程

如图 3-7 所示为四维空间的坐标体系 $O-xyzu$，其中任意三条坐标轴组成一个投影空间，即原来的四个坐标空间成为四个投影空间，六个坐标面成为六个投影面。如已知空间点 A，作出 A 点在投影空间 Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 中的投影，即得四个超投影 $(A)_1$、$(A)_2$、$(A)_3$、$(A)_4$。然后从超投影向组成该投影空间的三个投影面作投射线。投射线与投影面的交点即为四维空间点在二维投影面上的投影，由此得到六个投影 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6。可以看出，几何元素投影时应用"降维"原则。

二、投影面的展开方法

为了使二维投影重合在同一投影面上，投影面的展开过程也必须应用"降维"原则。现

取 Σ_1、Σ_2、Σ_3 三个投影空间及点在其中的投影加以讨论（图 3-8 a）。

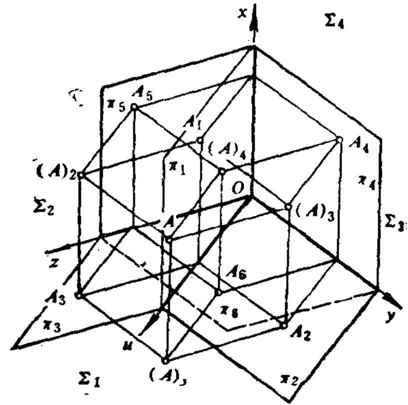


图3-7　四维空间中的正投影

先将其中两个投影空间（如Σ_1、Σ_2）绕 u 轴旋转至与Σ_3重合（图 3-8 b），这时超投影（A）$_2$、（A）如同三维空间中的点一样。然后将投影面 $\pi_2 \equiv \pi_3$ 再次绕投影轴 u 旋转，使三个投影面 π_1、π_2、π_3 均重合在一起（图 3-8 c），去掉投影面的面框，即得点 A 的三面投影图（图 3-8 d）。$\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$表示三个空间重合。

图 3-9 为点的六面投影图。在同一投影线上的三个投影都可以用来表示一个四维空间中的点，其中与投影轴成 45° 的斜线为投影连系线。如以A_1、A_2、A_3表示点A，这时，三个投影的连线与 u 轴垂直，该投影轴又称为基线 RL（Reference line）；如以一组投影 A_1、A_4、A_5 表示点A，则 x 轴作为基线，基线呈水平线的称为水平基线（HRL），呈垂直线的称为垂直基线（VRL）。通常，RL 是指水平基线。

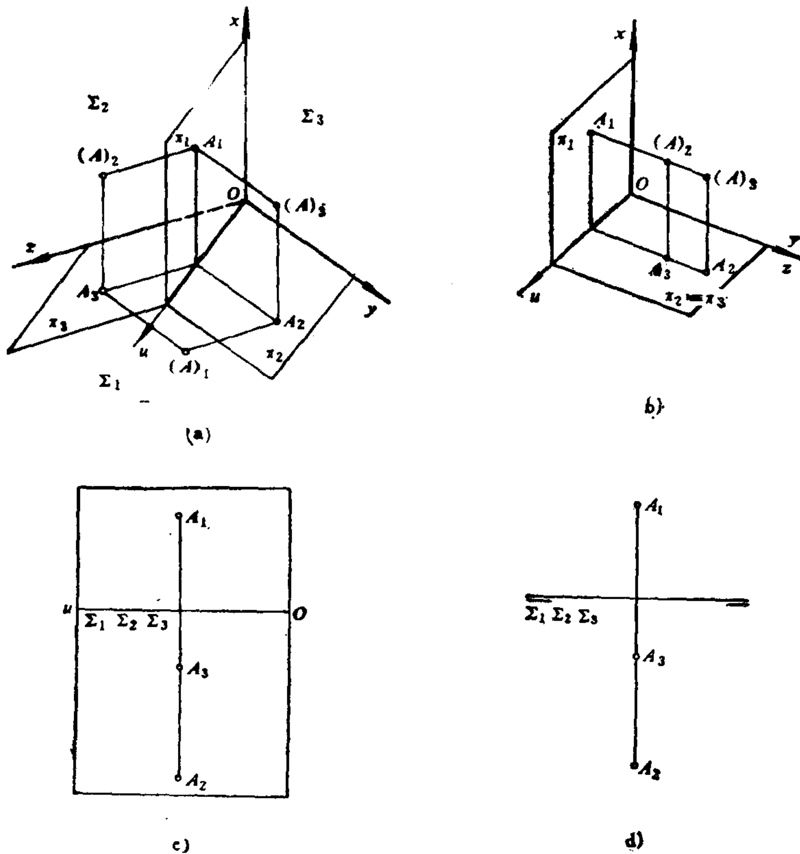


图3-8　四维空间中点的投影图的形成

三、四维空间中点的投影与坐标

由图 3-7 得知，四维空间中点A到投影空间 Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4 的距离即为A在四维空间

坐标体系中的相应坐标值，可以看出

$$x_A = A(A)_1 = (A)_2A_3 = (A)_3A_2 = (A)_4A_6$$
$$y_A = A(A)_2 = (A)_1A_3 = (A)_3A_1 = (A)_4A_5$$
$$z_A = A(A)_3 = (A)_1A_2 = (A)_2A_1 = (A)_4A_4$$
$$u_A = A(A)_4 = (A)_1A_6 = (A)_2A_5 = (A)_3A_4$$

由此可知，超投影可由下列坐标值决定：

$(A)_1$ 由 y_A、z_A、u_A 决定；

$(A)_2$ 由 x_A、z_A、u_A 决定；

$(A)_3$ 由 x_A、y_A、u_A 决定；

$(A)_4$ 由 x_A、y_A、z_A 决定。

同样，二维投影由下列坐标值决定：

A_1 由 x_A、u_A 决定；

A_2 由 y_A、u_A 决定；

A_3 由 z_A、u_A 决定；

A_4 由 x_A、y_A 决定；

A_5 由 x_A、z_A 决定；

A_6 由 y_A、z_A 决定。

在六面投影图上，为了表示坐标值的正负号，规定在水平基线以上的为正，以下的为负；在垂直基线以左的为正，以右的为负。如图 3-9 中的 x_A、u_A 为正，y_A、z_A 为负。

四、四维空间中点的投影规律

从图 3-9 中可得出点的投影规律如下：

（1）在四维空间中，点在过同一投影轴的三个投影面上的投影的连线垂直于该投影轴（基线）。

如 A_1、A_2、A_3 的连线垂直于 u 轴，A_3、A_5、A_6 的连线垂直于 z 轴，A_2、A_4、A_6的连线垂直于 y 轴，A_1、A_4、A_5 的连线垂直于 x 轴。

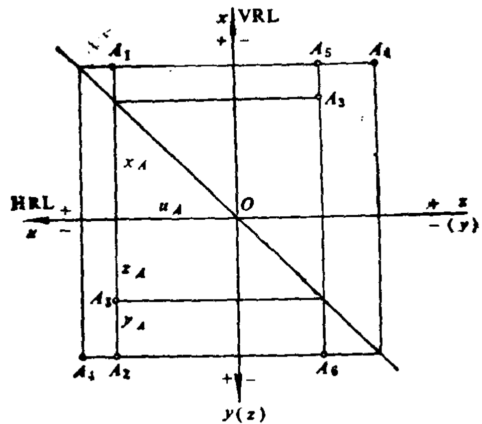


图3-9　四维空间中点的六面投影图

（2）A_1到 u 轴（水平基线）的距离反映点 A 到 Σ_1 的距离，即点 A 的 x 坐标。A_2 到 u 轴的距离反映点 A 到 Σ_2 的距离，即点 A 的 y 坐标。A_3到 u 轴的距离反映点 A 到Σ_3 的距离，即点A的 z 坐标。A_1、A_2、A_3 的连线与 x 轴（垂直基线）的距离反映点 A 到 Σ_4 的距离，即点 A 的 u 坐标。

（3）A_4 到 y 轴的距离等于A_5 到 z 轴的距离，等于A_1 到 u 轴的距离；A_4到 x 轴的距离等于A_6 到 z 轴的距离，等于A_2 到 u 轴的距离；A_5 到 x 轴的距离等于A_6 到 y 轴的距离，等于A_3 到 u 轴的距离。

第二篇　蒙日体系中的多维画法几何学

第四章　几何元素的图示法

从第三章得知，在四维空间中的几何元素一般用处于同一投影连线上的三个二维投影来描述．因此在 n 维空间中的几何元素用 $n-1$ 个二维投影来描述。本章主要讨论四维空间中几何元素的图示法，这些几何元素是点、直线、平面和超平面（三维空间）。

第一节　四维空间中点的图示法

一、一般位置点的投影

如已知四维空间中点 A 的坐标（x_A、y_A、z_A、u_A），其投影图的作图步骤如下（图 4-1）：

（1）在基线 RL 上从原点 O 取坐标值 u_A（u_A 为正值），得点 A_0。

（2）从 A_0 作 RL 的垂直线，即投影连线，在其上取坐标值 x_A（x_A 为正值），所得点 A_1 即为 A 在 π_1 上的投影。

（3）同样，在同一投影连线上取 y_A、z_A（均为负值），所得点 A_2、A_3 即为 A 在 π_2、π_3 上的投影。

参照第三章第三节所述的投影规律可作出点 A 在 π_4、π_5、π_6 上的投影。

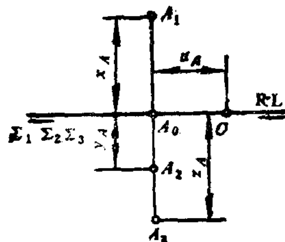


图4-1　四维空间中点的投影图

二、特殊位置点的投影

1. 位于某一投影空间中的点的投影

当点位于某一投影空间中时，该点到投影空间的距离为零，即其相应的坐标值为零，该点的一个投影在相应的投影轴上。

图 4-2 a、b、c 分别为在投影空间 Σ_1、Σ_2、Σ_3 中的三点 A、B、C 的投影图。其相应的坐标值 x_A、y_B、z_C 为零，因此，投影 A_1、B_2、C_3 分别在 u 轴上（即 RL 上）。

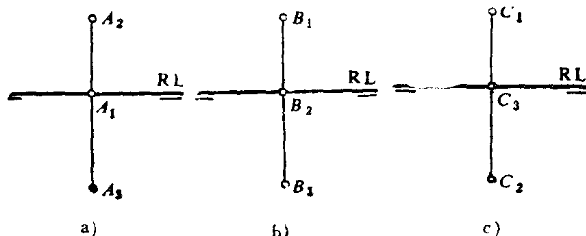


图4-2　位于某一投影空间中的点的投影

2. 位于某一投影面上的点的投影

当点位于某一投影面上，即该点位于两个投影空间相交的投影面上时，该点到这两个投影空间的距离为零，它的两个投影在相应的投影轴上。

如图 4-3 a、b、c 分别为在投影面 π_1、π_2、π_3 上的三点 A、B、C 的投影图。其相应的坐标值 y_A 和 z_A、x_B 和 z_B、x_C 和 y_C 为零，因此 A_2 和 A_3、B_1 和 B_3、C_1 和 C_2 分别位于 u 轴上。

3. 位于某一投影轴上的点的投影

当点位于某一投影轴上，即该点位于三个投影空间相交的投影轴上时，点到这三个投影空间的距离为零，该点的三个投影在相应的投影轴上。

图 4-4 为位于轴 u 上的点 A 的投影图。其相应的坐标值 x_A、y_A、z_A 为零，因此投影 A_1、A_2、A_3 均重合且位于 u 轴上。

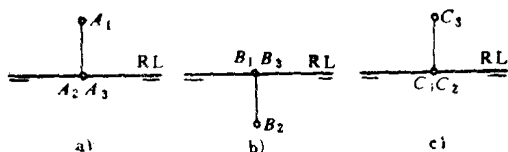


图4-3　位于某一投影面上的点的投影

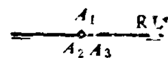


图4-4　位于某一投影轴上的点的投影

4. 与投影空间等距离的点的投影

（1）与两个投影空间等距离的点的投影：该点必定位于两投影空间的超两面角的等分空间中，它的两个坐标相等，即点的两个投影与 RL 的距离相等。若坐标值同号，则两个投影重合；若异号，则两个投影对称分布于RL 的两侧。如图 4-5 a 为与 Σ_2、Σ_3 两投影空间等距离的点 A 的投影图，其坐标值均为正值，即 $y_A = z_A$，因此 A_2、A_3 两个投影重合且均在 RL 的上方。图 4-5 b 为与 Σ_1、Σ_3 两投影空间等距离的点的投影图，其坐标值为异号，即 $x_B = -z_B$，因此 B_1、B_3 两个投影对称分布在RL的两侧。

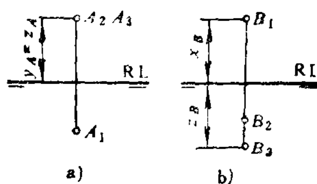


图4-5　与两个投影空间等距离的点的投影

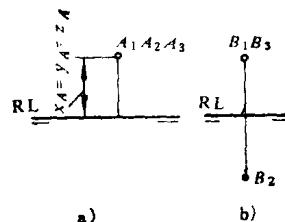


图4-6　与三个投影空间等距离的点的投影

（2）与三个投影空间等距离的点的投影：该点必定位于三个投影空间的两等分空间的交平面上，它的三个坐标相等，即点的三个投影与 RL 的距离相等，若坐标值都是同号，则三个投影重合；若其中有一个异号，则对称分布在 RL 的两侧。如图 4-6 a、b 分别为与Σ_1、Σ_2、Σ_3 三个投影空间等距离的点 A 和点 B 的投影图。点 A 的三个坐标值均为正值，即 $x_A = y_A = z_A$，因此 A_1、A_2、A_3 三个投影重合，并位于 RL 的上方。点 B 的 y_B 为负值，x_B、z_B 为正值，即 $x_B = -y_B = z_B$，因此B_1、B_3重合，并位于 RL 的上方，B_2在 RL 的下方。

第二节　四维空间中直线的图示法

一、直线的投影

位于四维空间中的直线由该直线上的两点所确定。作出两个点的投影，然后连接两点的同面投影即得直线的各个投影。如图 4-7 所示为四维空间中的直线 l 的投影图。A、B 为 l

l 上的两点，则连线 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 即为直线 l 的投影 l_1、l_2、l_3。若点属于一直线，则点的各个投影在直线的各个同面投影上。如图 4-7 所示点 C 在 l 上，则点 C 的各个投影 C_1、C_2、C_3 分别在直线 l 的每个投影 l_1、l_2、l_3 上。反之亦然。

二、直线的迹点

直线与各个投影空间的交点称为直线的空迹点。直线的空迹点既在所给直线上，又在相应的投影空间中，因此其投影，既具有点在直线上的投影性质又具有点在投影空间中的投影性质。

如图 4-7 所示，直线 l 在投影空间 Σ_1、Σ_2、Σ_3 中的空迹点为 M、N、S。显然，它们的坐标分别为 $x_M=0$，$y_N=0$，$z_S=0$，因此其相应的投影 M_1、N_2、S_3 在 RL 上。其作图方法如下：如作 M 点，可先求出 l_1 与 RL 的交点 M_1，从 M_1 作投影连线与 l_2、l_3 相交，即得投影 M_2、M_3。空迹点 N、S 的作法与点 M 相类似，这时 l_2 与 RL 的交点为 N_2，l_3 与 RL 的交点为 S_3。

图 4-8 所示为直线 l 上的 M、N、S 以及在 Σ_4 中的迹点 R 的六面投影图。

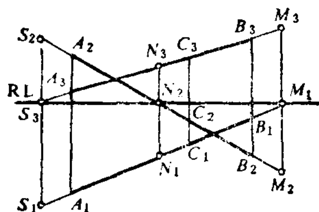


图4-7 直线的投影图

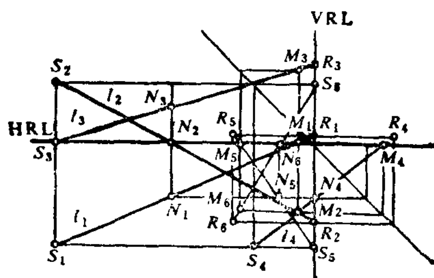


图4-8 直线的空迹点

直线在投影面上的迹点称为直线的面迹点。直线的面迹点一般不存在。这是因为，在四维空间中，在一般情况下直线与平面不相交。但在特殊情况下是存在的，如图 4-9 所示直线 m 上的点 P 即为直线在 π_1 上的面迹点。

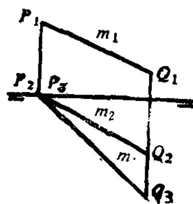


图4-9 直线的面迹点

三、直线上与两投影空间等距离的点的投影

直线上的点到两投影空间的距离相等，即该点既在直线上又在两投影空间的等分空间中，因此其投影既具有点在直线上的投影性质，又具有点在两投影空间的等分空间中的投影性质。

在一条直线上符合以上条件的点共有六个：

（1）三个点的两个投影重合在 RL 的一侧，如图 4-10 a 所示，点 D 在 l 上，且与 Σ_1、Σ_2 等距离；点 E 在 l 上，且与 Σ_1、Σ_3 等距离；点 F 在 l 上，且与 Σ_2、Σ_3 等距离。

（2）三个点的两个投影对称分布在RL的两侧，如图4-10 b 所示，点 H 在 l 上，且与 Σ_1、Σ_2 等距离；点 G 在 l 上，且与 Σ_1、Σ_3 等距离，点 K 在 l 上，且与 Σ_2、Σ_3 等距离。作图时可先作出 l_2 与RL的交点 1，然后过 1 点作对称于RL的 l_2 的对称线，后者与 l_1 相交于 H_1，与 l_3 相交于 K_3。同理，可求出 l_3 与RL的交点 2，过 2 作对称于RL的 l_3 的对称线，后者与 l_1 相交于 G_1 点。

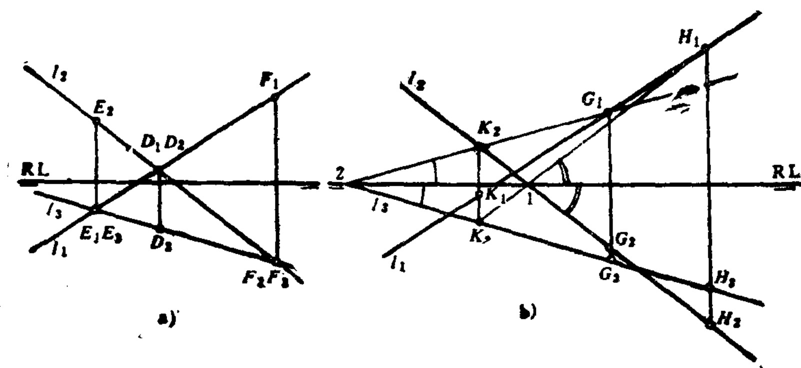


图4-10　直线上与两投影空间等距离的点的投影

根据H_1、K_3、G_1可作出其他投影H_2、H_3、K_1、K_2和G_2、G_3。

四、特殊位置直线的投影

由第一章第五节得知：四维空间中的特殊位置直线共有三种，即空平行线、面平行线和轴平行线。下面分别说明其投影特性。

1. 空平行线的投影

空平行线平行于一个投影空间，即在空平行线上的各点与该投影空间的距离都相等。因此直线的一个投影平行于相应的投影轴（或基线）。如图4-11所示，为平行于Σ_1的直线l的六面投影图。l在π_1、π_4、π_5上的投影l_1、l_4、l_5均平行于HRL，l在Σ_1中的超投影$(l)_1$反映实长，但$(l)_1$可由l_2、l_3决定，因此线段l的实长可按三维画法几何中的"直角三角形方法"求出。

图4-12所示为位于投影空间Σ_2中的直线l的六面投影图。因为$y_l=0$，所以l_2 l_6与HRL重合，l_4与VRL重合。

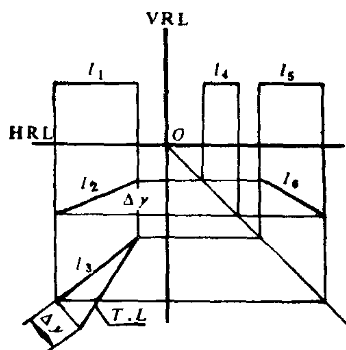


图4-11　平行于Σ_1空间的直线的六面投影图

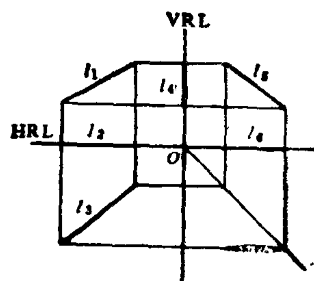


图4-12　位于Σ_2空间的直线的六面投影图

2. 面平行线的投影

面平行线平行于一个投影面，即平行于两个投影空间，也即面平行线上的各点与两个投影空间的距离都相等，因此直线的两个投影都平行于相应的投影轴（或基线）。如图4-13所示为平行于Σ_1、Σ_2，即平行于π_3的直线m的六面投影图。m在π_1、π_2、π_5、π_6上的投影m_1、m_2、m_5、m_6均平行于HRL，在π_4上的投影m_4重影为一点；在π_3上的投影m_3反映线段实长。由于π_3与π_4是绝对垂直的，因此，与π_3平行的直线m必定与π_4垂直，反之亦然。

如图4-14所示为位于π_1投影面上的直线m的六面投影图，因为$y_m = z_m = 0$，所以m_2、m_3与HRL重合，m_4、m_5与VRL重合。

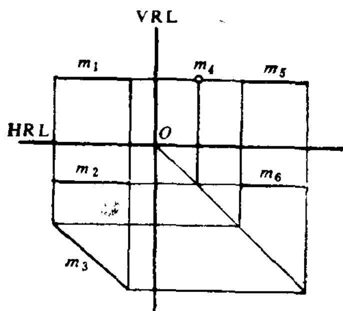


图4-13　平行于π_3投影面的直线的六面投影图

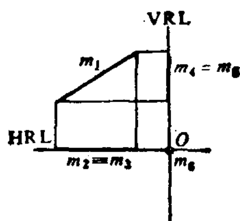


图4-14　位于π_1投影面上的直线的六面投影图

3. 轴平行线的投影

轴平行线平行于一投影轴，即平行于三个投影空间，也即在轴平行线上的各点分别与三个投影空间等距离，因此轴平行线的三个投影都平行于相应的投影轴（或基线）。如图4-15所示为平行于Σ_1、Σ_2、Σ_3，即平行轴u的直线n的六面投影图。n在π_1、π_2、π_3上的投影n_1、n_2、n_3平行于HRL，且反映其实长；在π_4、π_5、π_6上的投影n_4、n_5、n_6均重影为一点。

如图4-16所示为位于轴u上的直线n的六面投影图。因为$x_n = y_n = z_n = 0$，所以n_1、n_2、n_3与轴u（即HRL）重合，n_4、n_5、n_6与原点O重合。

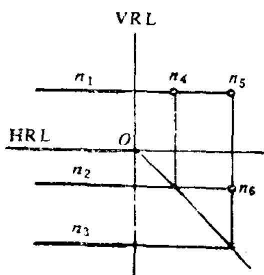


图4-15　平行于投影轴u的直线的六面投影图

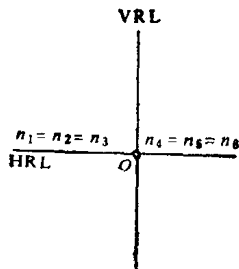


图4-16　位于轴u上的直线的六面投影图

第三节　四维空间中平面的图示法

一、平面的投影

位于四维空间中的平面由该平面上不共线的三个点所确定。因此，欲求平面的投影，可先作出这三个点的各个投影，然后连接三点的同面投影即得平面的各个投影。

如图4-17所示为四维空间中平面$\triangle ABC$的投影图。它的各个投影$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$是由平面上的三个点A、B、C的各个同面投影连接而得。

若一点位于该平面上，则该点的各个投影均在该平面的同面投影上；若两点在平面上，则两点的连线也必定在平面上。如图4-17中A、D为平面$\triangle ABC$上的点，则AD连线也必定在平面上；点K在AD上，也必定在该平面上。

二、平面的迹点和迹线

1. 平面的迹点

平面与各投影面的交点称为平面的面迹点。平面的面迹点既在所给平面上又在投影面上，因此其投影既具有点在平面上的投影性质又具有点在投影面上的投影性质。

2. 平面的迹线

平面与各个投影空间的交线称为平面的空迹线。平面的空迹线既在所给平面上又在相应的投影空间中，因此其投影既具有直线在平面上的投影性质又具有直线在投影空间中的投影性质。

如图4-18所示为已知平面P的面迹点和空迹线的示意图。M、N、S为平面在投影面π_1、π_2、π_3上的面迹点。NS、SM、MN分别为平面P在投影空间Σ_1、Σ_2、Σ_3上的空迹线。组成某一投影空间的两个投影面上的面迹点的连线即为该投影空间的空迹线。平面P上的任意直线EF、GH在Σ_1上的空迹点E、G必定位于平面在Σ_1中的空迹线NS上，同样，EF、GH在Σ_3上的空迹点F、H也必定位于平面在Σ_3中的空迹线MN上。由此可知：直线的空迹点、平面的面迹点、平面的空迹线有如下的几何关系：

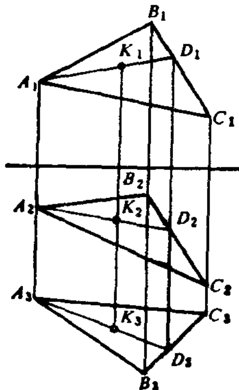


图4-17 平面的投影图

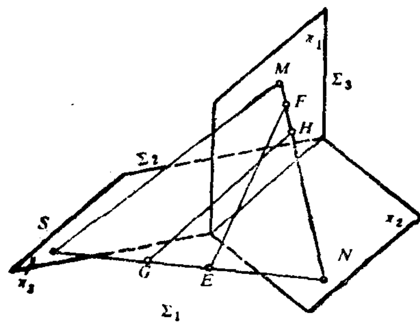


图4-18 平面的面迹点和空迹线

（1）平面的面迹点和平面上直线的空迹点的连线即为平面的空迹线。

（2）平面的空迹线与投影面的交点即为平面的面迹点。

（3）平面上任一直线的空迹点必定位于平面在同一投影空间的空迹线上。

根据以上几何关系，已知平面的空迹线和面迹点的作图方法举例如下：

例如：已知平面由相交两直线a、b所决定（图4-19），其空迹线和面迹点的作图步骤为：

（1）分别作出直线a、b在投影空间Σ_1、Σ_3（也可以在Σ_2）中

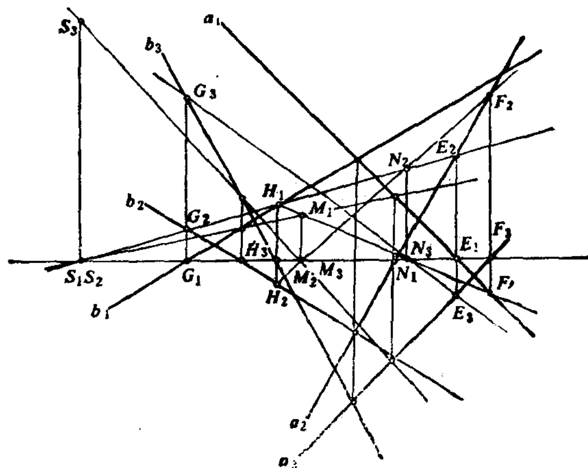


图4-19 平面的空迹线和面迹点的作图方法

的空迹点E、G、F、H。

（2）连线EG、FH即分别为平面在Σ_1、Σ_3中的空迹线。

（3）EG、FH与投影面π_1、π_2、π_3的交点M、N、S即为平面的面迹点。

在三维画法几何中，是用迹线来表示平面，与此类似，在四维画法几何中也可用平面的空迹线来表示平面，如图4-20所示。

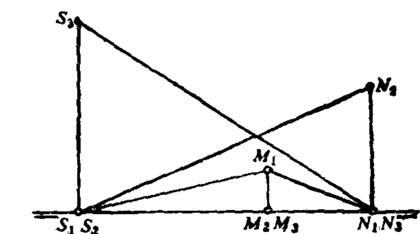


图4-20　平面的空迹线表示法

三、特殊位置平面的投影

由第一章第五节得知：四维空间中特殊位置的平面共有六种，即空平行面、面平行面、空垂直面、空平行空垂直面、单面半平行面、双面半平行面。

1. 空平行面的投影

空平行面平行于一个投影空间，因此在空平面上的各点与该投影空间的距离都相等，因此平面的一个投影为一直线且平行于相应的投影轴。如图4-21所示为平行于Σ_1的$\triangle ABC$的六面投影图。$\triangle ABC$在π_1、π_4、π_5上的投影均为一直线且平行于HRL，$\triangle ABC$在Σ_1中的超投影$(\triangle ABC)_1$反映实形。$(\triangle ABC)_1$是由$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$所决定的，因此$\triangle ABC$的实形可按三维画法几何中的有关方法求出。

2. 面平行面的投影

面平行面平行于一个投影面，即平行于两个投影空间，因此在面平行面上的各点与两个投影空间的距离都相等，平面的二个投影都平行于HRL。如图4-22所示为平行于π_3投影面，也即平行于Σ_1、Σ_2的平面$\triangle ABC$的六面投影图。$\triangle ABC$在π_1、π_2、π_5、π_6上的投影均平行于HRL，在π_4上的投影重影为一点，即$\triangle ABC$与π_4绝对垂直，在π_3上的投影$\triangle A_3B_3C_3$反映平面的实形。

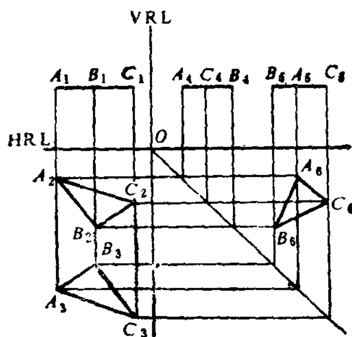


图4-21　平行于Σ_1空间的平面的六面投影图

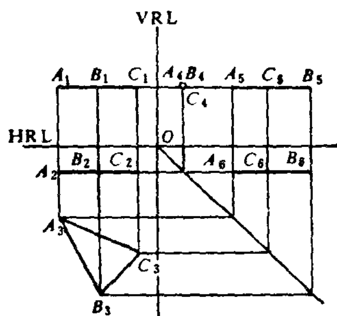


图4-22　平行于π_3面的平面的六面投影图

3. 空垂直面的投影

空垂直面垂直于一投影空间，因此在该投影空间中的投影为一直线，并且在组成该投影空间的投影面上的投影也必定为直线。如图4-23所示，因平面$\triangle ABC$垂直于投影空间Σ_1，故$(\triangle ABC)_1$为一直线，也即平面在π_2、π_3、π_6上的投影必定为直线。

4. 空平行空垂直面的投影

空平行空垂直面平行于一个投影空间、垂直于另一个投影空间。如图4-24所示平面$\triangle ABC$垂直于Σ_1且平行于Σ_3，因此投影$A_2B_2C_2$、$A_3B_3C_3$、$A_5B_5C_5$、$A_6B_6C_6$为直线，且

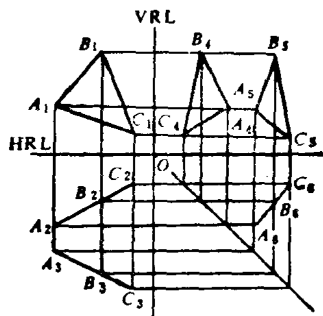


图4-23 垂直于Σ_1的平面的六面投影图

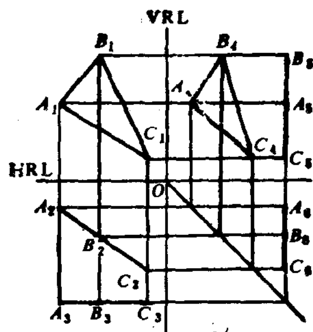


图4-24 垂直于Σ_1且平行Σ_3的平面的六面投影图

$A_3B_3C_3$平行于HRL，$A_5B_5C_5$、$A_6B_6C_6$平行于VRL。

5. 单面半平行面的投影

单面半平行面半平行于一个投影面，即半垂直于与该投影面成绝对垂直的投影面。如图4-25所示为$\triangle ABC$半平行于π_6，故必定半垂直于π_1，投影$A_1B_1C_1$为一直线。平面中直线BD垂直于π_1，且与π_6平行，在此平面上只有这个方向的直线与π_6平行，即只有一个非固有点。

6. 双面半平行面的投影

双面半平行面对两个成绝对垂直的投影面都是半平行和半垂直。如图4-26所示，$\triangle ABC$对π_1、π_6都成半平行和半垂直，因此它在π_1、π_6上的投影为一直线，且AE、BD直线分别与π_1、π_6平行。

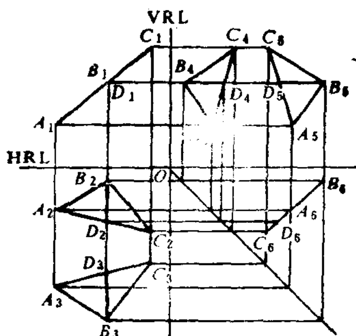


图4-25 半平行于π_6的平面的六面投影图

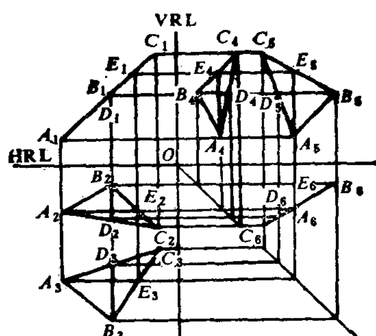


图4-26 半平行于π_1、π_6的平面的六面投影图

第四节 四维空间中超平面的图示法

一、超平面的投影

四维空间中的超平面由超平面上不共面的四个点所确定，因此，先作出这四个点的各个投影，然后连接四个点的同面投影即得超平面的各个投影。

如图4-27所示为四维空间中超平面$ABCD$的投影图。它的各个投影$A_1B_1C_1D_1$、$A_2B_2C_2D_2$、$A_3B_3C_3D_3$由超平面上四个点A、B、C、D的各个投影连接而得。

若一点在超平面的直线或平面上，则该点属于该超平面。若两点在超平面上，则其连线亦必定属于该超平面。若三点在超平面上，则三点所决定的平面也属于该超平面。如图4-27

所示，E、F、G三点属于一超平面，则$\triangle EFG$必定属于该超平面；直线MN在EF上，点K在MN上，则MN及K也必定属于该超平面。

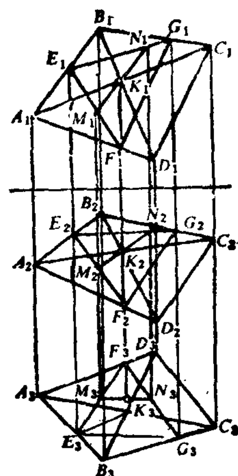


图4-27 超平面的投影图

二、超平面的迹线和迹面

1. 超平面的面迹线

超平面与各个投影面的交线称为超平面的面迹线。超平面的面迹线既在超平面上又在投影面上，因此面迹线既具有直线在超平面上的投影性质又具有直线在投影面上的投影性质。

2. 超平面的空迹面

超平面与各个投影空间的交平面称为超平面的空迹面。超平面的空迹面既属于超平面又属于投影空间，因此空迹面既具有平面属于超平面的投影性质又具有平面属于投影空间的投影性质。

如图4-28 a 所示为已知超平面T的面迹线和空迹面示意图。超平面T在投影面π_1、π_2、π_3上的面迹线分别为τ_1、τ_2、τ_3，在投影空间Σ_1、Σ_2、Σ_3上的空迹面分别为$\tau_2\tau_3$、$\tau_1\tau_3$、$\tau_1\tau_2$、τ_1、τ_2、τ_3汇交于点t，t为超平面与坐标轴u的交点，称为面迹线和空迹面的集合点。

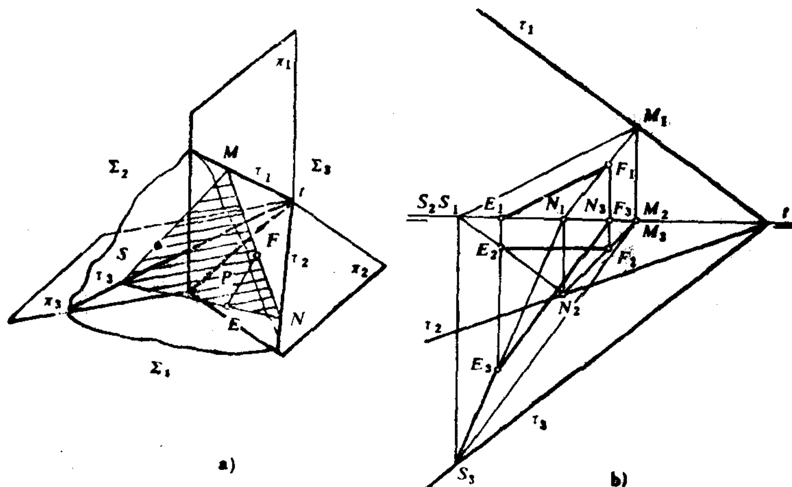


图 4-28 超平面的面迹线和空迹面

设在超平面内有一平面MNS，则MNS在π_1、π_2、π_3上的面迹点M、N、S必定分别在τ_1、τ_2、τ_3上；在Σ_1、Σ_2、Σ_3上的空迹线NS、SM、MN也必定分别在空迹面$\tau_2\tau_3$、$\tau_1\tau_3$、$\tau_1\tau_2$上。若直线EF在MNS上，则EF属于T，EF在Σ_1、Σ_3上的空迹点必定在同一投影空间的平面的空迹线上和超平面的空迹面上。图4-28 b 为超平面T及属于该超平面的平面MNS、直线EF的投影图。

由以上分析得知：

（1）超平面的空迹面两两相交为超平面的面迹线。

（2）超平面的每三条面迹线汇交于投影轴上的一个集合点。

（3）在超平面内，平面的空迹线和直线的空迹点必定位于同一投影空间的超平面的空迹面上。

三、特殊位置超平面的投影

由第一章第五节得知：在四维空间中，特殊位置的超平面共有三种，即空平行超平面、面平行超平面、轴平行超平面。

1．空平行超平面的投影

空平行超平面平行于一个投影空间，即其中各几何元素与该投影空间的距离都相等，故超平面的三个投影（面迹线）均为直线，且平行于相应的投影轴。

图4-29为平行于Σ_1的超平面T的六面投影图。其面迹线τ_1、τ_4、τ_5平行于HRL，且都具有重影性。

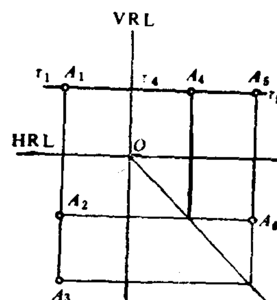


图4-29　平行于Σ_1的超平面的六面投影图

2．面平行超平面

面平行超平面平行于一个投影面，因此在该投影面上没有面迹线。

图4-30为平行于π_4的超平面T的六面投影图，它没有面迹线τ_4。由于T垂直于π_3，因此τ_3具有重影性。包含π_4的投影空间为Σ_3、Σ_4，根据有关定理得知，T与Σ_3、Σ_4的交平面α、β必定与π_4平行（图4-31），平面α与π_1、π_2的交线τ_1、τ_2分别与x、y轴平行，在投影图上都平行于VRL。

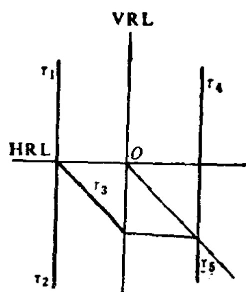


图4-30　平行于π_4的超平面的六面投影图

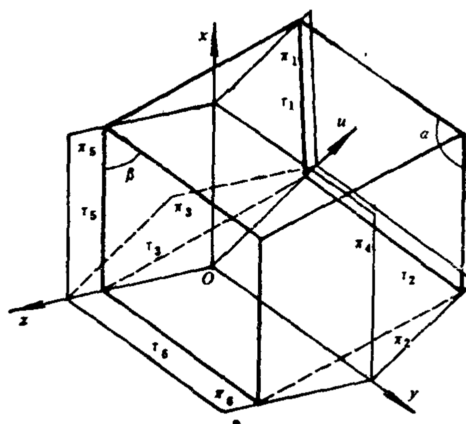


图4-31　平行于π_4的超平面的示意图

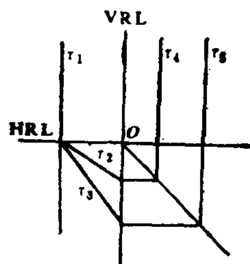


图4-32　平行于x轴的超平面的六面投影图

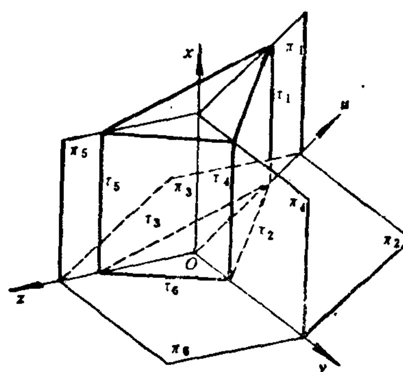


图4-33　平行于x轴的超平面的示意图

3. 轴平行超平面

轴平行超平面平行于一个投影轴。超平面与包含该轴的投影面上的面迹线都必定平行于该投影轴。

图4-32为平行于 x 轴的超平面T的六面投影图。其中 τ_1、τ_4、τ_5 都与 x 轴平行，在投影图上都与VRL平行。显然，T垂直于Σ_1，也即垂直于π_2、π_3、π_6，其面迹线τ_2、τ_3、τ_6都具有重影性（图中τ_6未画出）。图4-33为其示意图。

第五节　高于四维空间中的几何元素图示法

一、五维空间中的几何元素图示法

五维空间中的几何元素包括点、直线、平面、三维空间和四维空间。

在五维空间中有五个四维空间可作为投影空间，在五维空间中点到这五个投影空间的距离即为A在五维空间坐标系中相应的坐标值。

点在投影空间（四维空间）、三维空间、投影面（平面）上的投影也应采取逐次降维的方式进行。

在五维空间中的点，如同四维空间图示点一样，可用相交于一投影轴（坐标轴）的四个投影面上的投影加以描述。如图4-34所示，相交于轴 u 的四个互相垂直的投影面π_1、π_2、π_3、π_4，A在各投影面的投影分别为A_1、A_2、A_3、A_4，其中每个投影的u_A坐标值相等，另一坐标分别为x_A、y_A、z_A、t_A，将各投影面绕轴 u 旋转，使其重合在一个投影面上，即得五维空间中点A的投影图（图4-35）。

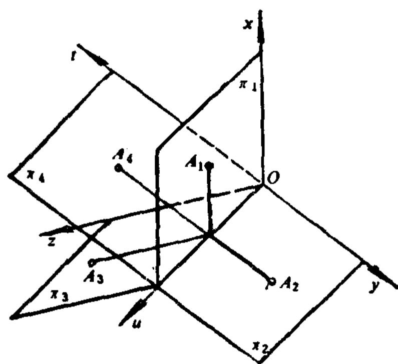


图4-34　五维空间中的坐标体系

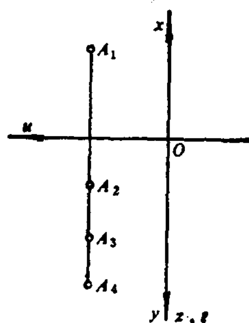


图4-35　点在五维空间中的投影图

图4-36为直线P在五维空间中的投影图。若直线上某一点的坐标值为零，该点即是直线在相应的四维投影空间中的迹点。如图中点M、N、S分别为直线在四维投影空间Σ_1、Σ_2、Σ_3中的迹点。平面在五维空间中的投影图可用类似方法表示。

图4-37为一般位置的四维空间T在五维空间中的投影图。四维空间与二维投影面相交为一条直线，即迹线。在投影面π_1、π_2、π_3、π_4上的迹线分别为τ_1、τ_2、τ_3、τ_4。四条迹线两两组成的六个迹面，即为T与六个三维空间的交平面；四条迹线三三组成的四个三维迹空间，即为T与四个四维空间的交空间。

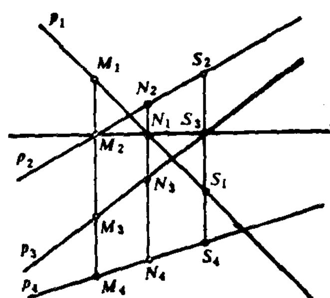


图4-36　直线在五维空间中的投影图

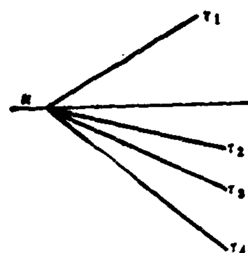


图4-37　四维空间在五维空间中的投影图

二、六维空间中几何元素的图示法

六维空间中的几何元素包括点、直线、平面、三维空间、四维空间和五维空间。

在六维空间中有六个五维空间作为投影空间。六维空间中的点到六个投影空间的距离即为该点在六维空间坐标系中相应的坐标值。

六维空间中点的图示方法为上述方法的推广。如图4-38所示，相交于 u 轴的五个互相垂直的投影面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5，点在各投影面上的二维投影分别为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5。图4-39为其投影图。

图4-40为直线 P 在六维空间中的投影图。同样，直线上某一点的坐标值为零，该点即是

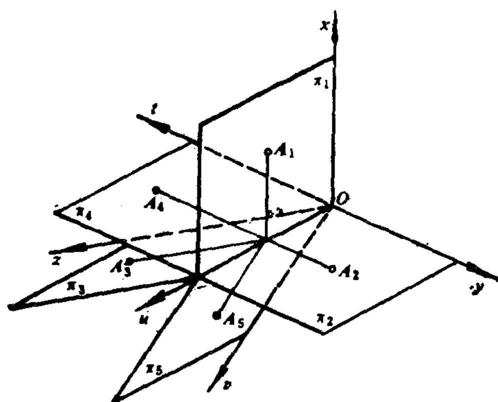


图4-38　六维空间中的坐标体系

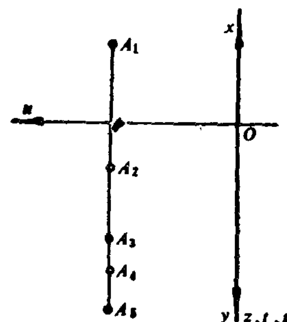


图4-39　点在六维空间中的投影图

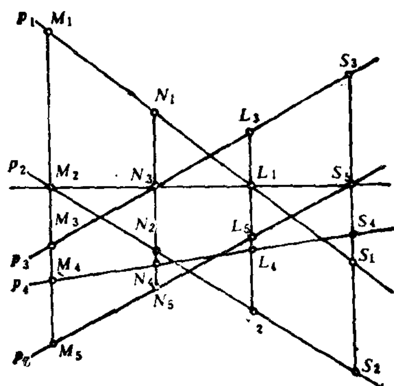


图4-40　直线在六维空间中的投影图

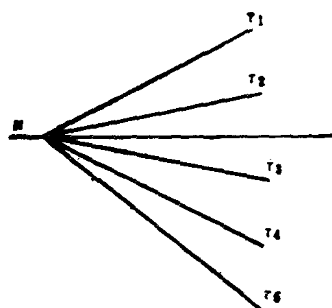


图4-41　五维空间在六维空间中的投影图

直线在相应的五维投影空间中的迹点，如图中点L、M、N、S分别为直线P在五维投影空间Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_5中的迹点。

图4-41所示为一般位置五维空间T在六维空间中的投影图。T与二维投影面的交线为一条直线，即迹线。T在投影面π_1、π_2、π_3、π_4、π_5上的迹线分别为τ_1、τ_2、τ_3、τ_4、τ_5。

依此类推：n维空间中的点可用$n-1$个二维投影表示；n维空间中一般位置的$n-1$维空间可用$n-1$条迹线表示。

第六节　四维点中心投影中的几何元素图示法

为便于应用四维画法几何中的蒙若法作中心投影，现选择投影空间Σ_2作为中心投影空间。

一、点的点中心投影

如图4-42所示，四维空间中的点A在投影空间Σ_1、Σ_2、Σ_3中的正投影分别为$(A)_1$、$(A)_2$、$(A)_3$，投影中心S在投影空间中的投影为$(S)_1$、$(S)_2$、$(S)_3$，$(SA)_1$、$(SA)_2$、$(SA)_3$即为投影线SA在各个投影空间中的投影。当点A从投影中心S投影到Σ_2中时，其投影即为SA与Σ_2的交点，该点的y坐标必定为零。延长S_2A_2与RL相交于A_2^0，同理，可在S_1A_1、S_3A_3上求出相应的A_1^0、A_3^0。点A^0即为点A的点中心投影。图4-43为其投影图。

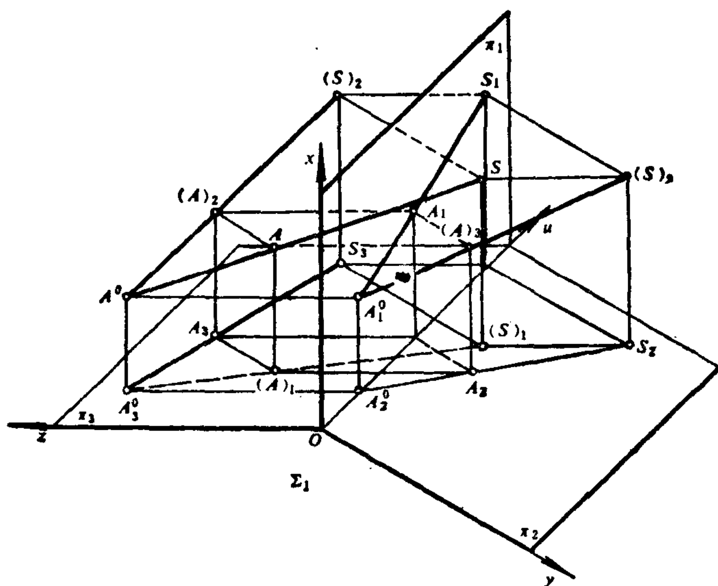


图4-42　四维点中心投影的示意图

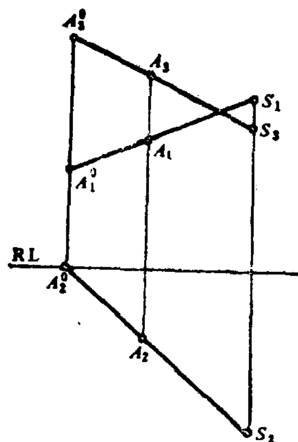


图4-43　点的四维点中心投影

二、直线的点中心投影

图4-44为直线P的中心投影p^0（p_1^0、p_2^0、p_3^0）的具体作图方法。首先分别作出P上A、B两点的中心投影A^0、B^0，连接之即得直线的中心投影p^0。如在三维空间中一样，在四维空间中直线的中心投影也有灭点。直线上无穷远点的中心投影叫做灭点。在四维空间中直线的灭点是平行于该直线的投射线与中心投影空间Σ_2的交点。其作图步骤如下：过S_2作p_2的平行线与RL相交于一点F_2^0，过F_2^0作RL的垂直线与p_1^0、p_3^0分别相交于F_1^0、F_3^0，从而确定了直线灭

点F^0的位置。延长p^0，必定经过F^0。

三、平面的点中心投影

如图4-45所示为△ABC的中心投影作图法。可利用图4-44的方法分别作出其顶点A、B、C的中心投影A^0、B^0、C^0，即得△ABC的中心投影△$A^0B^0C^0$。平面上无穷远线的中心投影即为平面的灭线，即过投影中心S且与被投影的平面互相平行的投射面与中心投影空间Σ_2的交线。其作图步骤如下：过S_2分别作A_2B_2、B_2C_2的平行线与RL相交于F_{12}^0、F_{22}^0，由此再求出F_{11}^0、F_{13}^0、F_{21}^0、F_{23}^0，灭点F_1^0、F_2^0的连线$F_1^0F_2^0$即为该平面的灭线。显然，在平面上各个方向的直线的灭点都应位于该平面的灭线上。

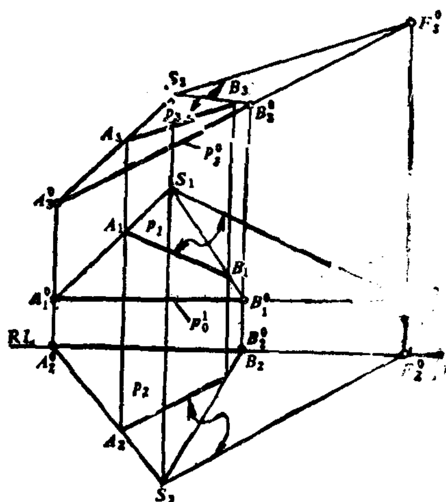


图4-44　直线的四维点中心投影

四、超平面的点中心投影

如图4-46所示为三维四面体$ABCD$的中心投影的作图法。图中点A在Σ_2中，其中心投影A^0即为A。四面体共有六条棱线，它们都不互相平行，所以有六个灭点。四面体有四个面，共有四条灭线，这些灭线和灭点都处在Σ_2中的某一个平面上，此平面称为灭面。灭面是超平面上无穷远面的中心投影，在该超平面中的任何直线的灭点和任何平面的灭线都位于灭面上。

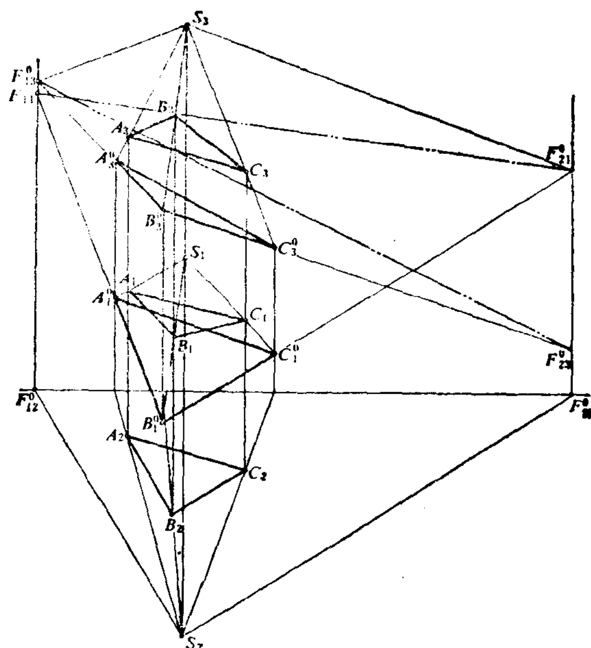


图4-45　平面的四维点中心投影

超平面的中心投影也叫透视投影，投影中心称为视点，投影面称为画面，中心投影图称为透视图。透视图有"近大远小"的现象，这与人们在S^3空间中观察到的现象是一致的。然而，

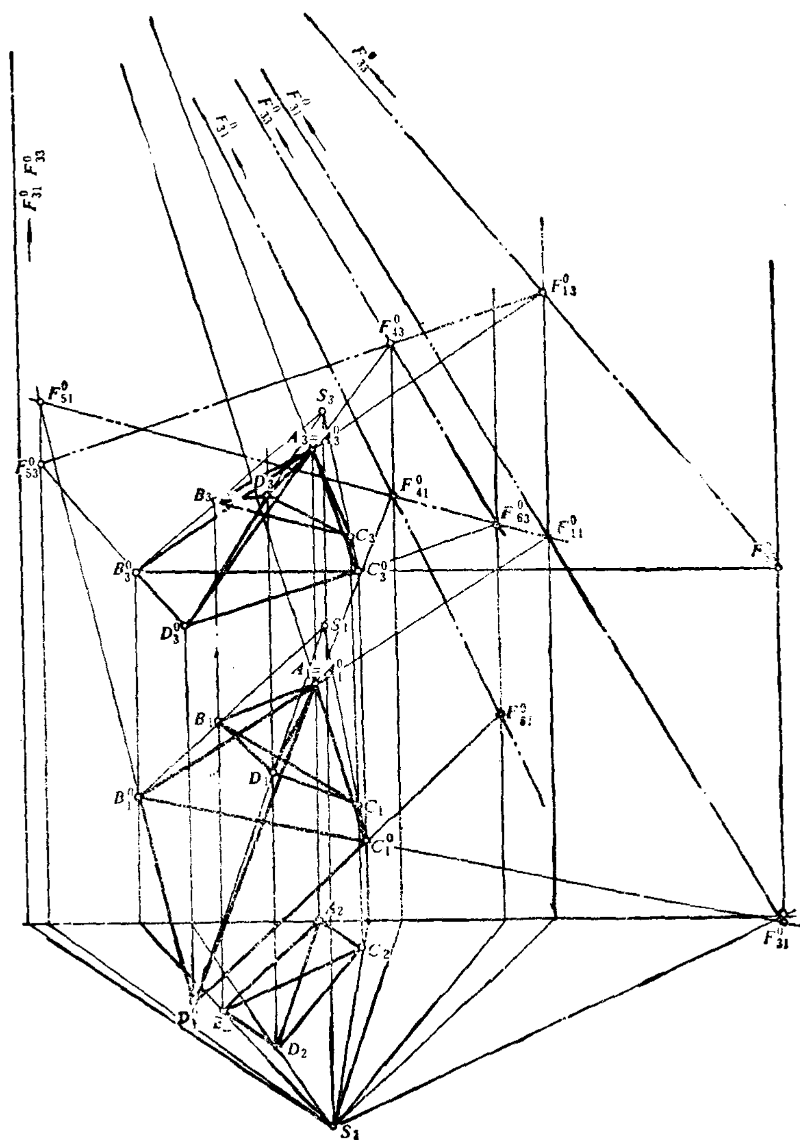


图4-46　超平面的四维点中心投影

对视点在画面上的正投影（也称立点）来说，它的透视图则是“近小远大”，这些现象在四维空间的中心投影中也存在。

第七节　四维线中心投影的几何元素图示法

为了便于应用蒙若法求作中心投影，选择投影面π_1作为四维线中心投影的投影面，π_1称为**中心投影面**，投影中心为SR。

一、点的线中心投影

点A的中心投影A^0就是投影中心SR与A点决定的投射面与投影面π_1的交点，如图4-47所示。为此，设两条基线RL1、RL2，RL1为π_1与π_2的交线，RL2为π_1与π_3的交线。作图时只要

分别作出 $(SR)_3$、$(SA)_3$和$(RA)_3$中任意两条直线与π_1的交点，其连线即为$(SRA)_3$与π_1的交线。同理，可求出$(SR)_2$、$(SA)_2$、$(RA)_2$中任意两条直线与π_1的交点，其连线即为$(SRA)_2$与π_1的交线，两直线的交点即为SRA与π_1的交点，也即为A点的中心投影A^0。作任何点的中心投影时，其投影面都包含投影中心SR，因此先作出$(SR)_3$、$(SR)_2$与π_1的交点是比较方便的。

二、直线的线中心投影

在一般情况下，直线的线中心投影仍是直线。如图4-48所示，分别求出直线l的两端点A、B的中心投影A^0、B^0，其连线l^0即为l的线中心投影。直线上的非固有点的中心投影称为"灭点"。包含投影中心SR作一个与该直线互相平行的投射面，此投射面与π_1的交点F^0即为其灭点。

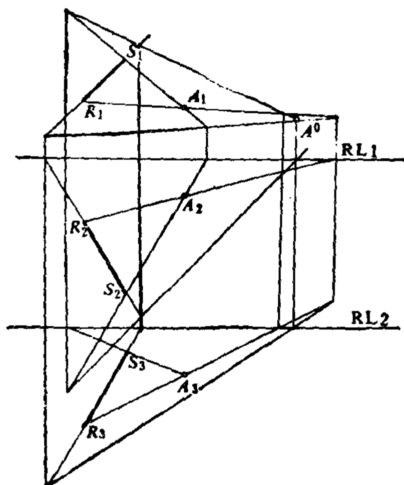


图4-47　点的四维线中心投影

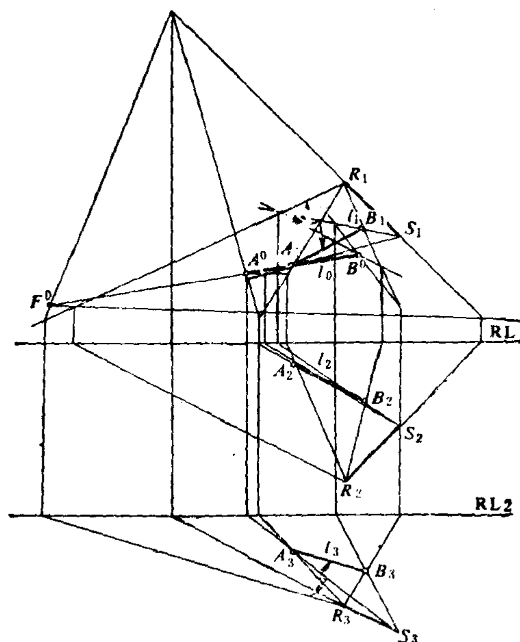


图4-48　直线的四维线中心投影

三、平面的线中心投影

在一般情况下，平面图形的线中心投影仍为平面图形。如图4-49为平行四边形$ABCD$的线中心投影，该平行四边形由两组平行线AB和DC、BC和AD所组成，其灭点分别为F_1^0和F_2^0，其连线$F_1^0F_2^0$即为其灭线。

四、超平面的线中心投影

由于中心投影面是平面S^2，它只能包含$\leqslant S^2$的几何图形，因此S^3超平面的线中心投影不能保持同素性。由于投影中心与超平面相交于一点，因此在一般情况下，超平面的中心投影重影成平面。在特殊情况下也可以重影为一直线。

如图4-50所示，由于投影中心SR上的点S位于四面体$ABCD$的棱线AB上，点R位于直线EB上，EB位于$ABCD$的棱面CBD上，所以投影中心SR属于由四面体$ABCD$所确定的S^3空间内。在$ABCD$内的任何点的投射面都位于该空间内，它与π_1相交于一直线，因此$ABCD$的中心投影$A^0B^0C^0D^0$重影为一直线。

关于四维中心投影较详细的论述见参考文献[10]。

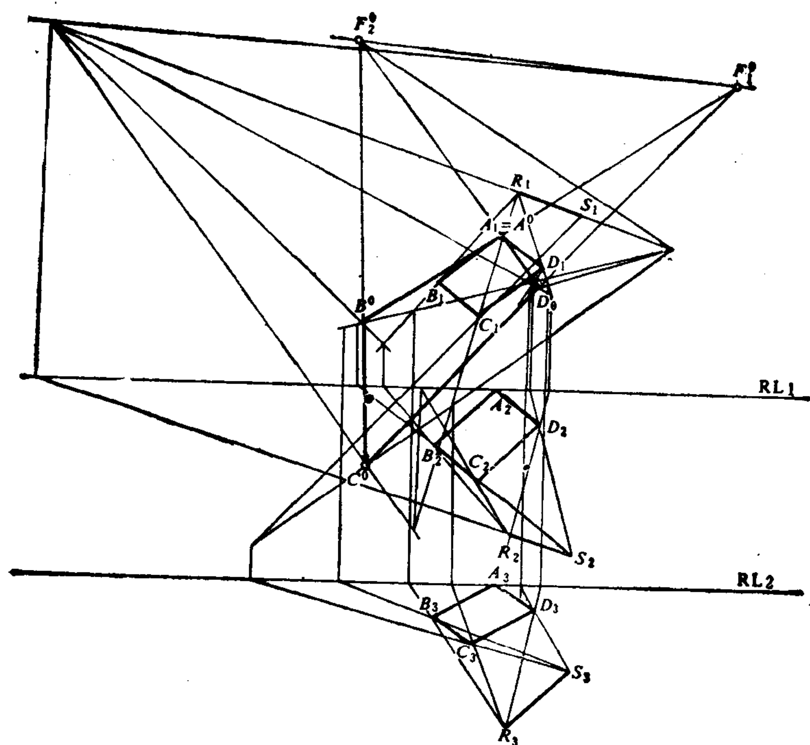


图4-49 平面的四维线中心投影

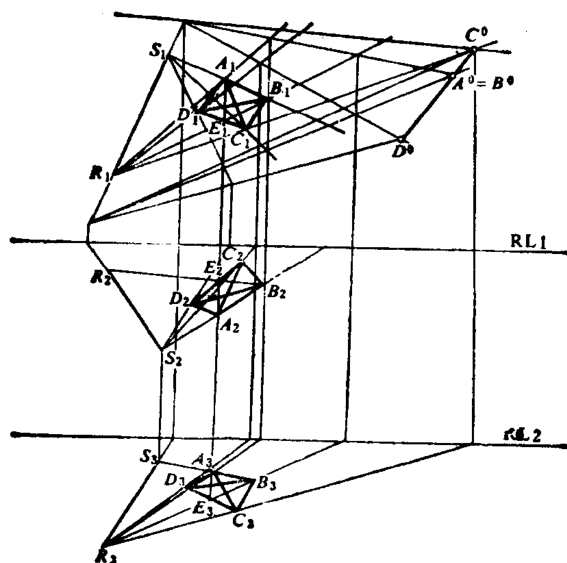


图4-50 超平面的四维线中心投影

第五章　四维空间中几何元素间的相对位置

在四维空间中，几何元素间的相对位置包括平行、相交、垂直以及从属关系等。

本章将根据四维几何学的一些定理，来研究它们的投影性质和具体作图方法。

通过本章的学习，不仅可以掌握四维画法几何中的一些重要的基本作图，而且可以进一步理解四维几何学中的有关概念。

第一节　相　交　问　题

一、两迹线超平面相交

用面迹线表示的超平面，简称为迹线超平面。由四维几何学可知：两超平面相交于一平面。

图 5-1 a 是两迹线超平面 T 与 Λ 相交的示意图。可以看出，两同面迹线的交点即是两超平面的共有点。因此，求出三对同面迹线的交点，便可确定两超平面的交平面。其中，$\tau_1\times\lambda_1=A$；$\tau_2\times\lambda_2=B$；$\tau_3\times\lambda_3=C$，连接 A、B、C，即可得两超平面的交平面 ABC。如果进一步分析，还可看出：

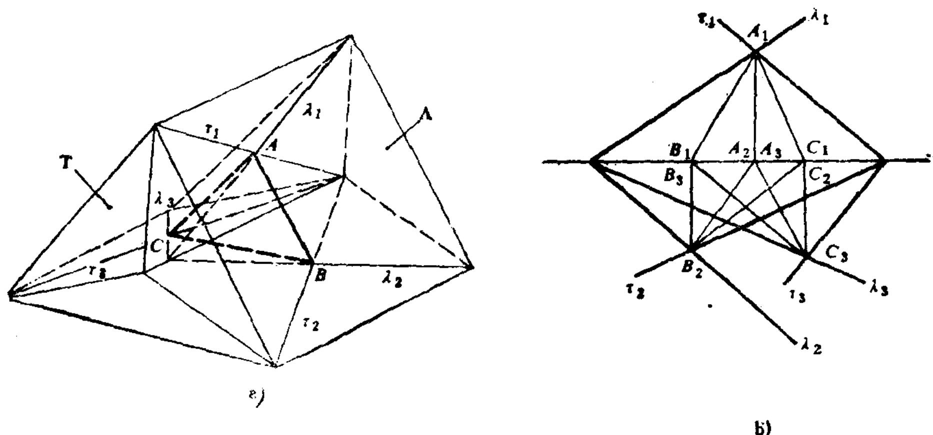


图5-1　两一般位置的迹线超平面相交

（1）直线 AB、BC、AC 分别是各同空间迹面的交线，如 AB 是同空间迹面 $\lambda_1\lambda_2$ 与 $\tau_1\tau_2$ 的交线。因此，可得出如下结论：各同空间迹面的交线是两超平面的公有线，而非同空间迹面则相交于点，如 $\lambda_1\lambda_2\times\tau_2\tau_3=B$。

（2）A、B、C 各点也是交平面 ABC 分别与投影面 π_1、π_2、π_3 的交点。

图 5-1 b 是确定两个一般位置超平面 T、Λ 的交平面 ABC 的具体作图。首先，求出各同面迹线的交点，如 λ_1 与 τ_1 的交点 A，其投影 A_1 与 A 重合，而 A_2、A_3 在基线上。同理，可求出 B、C 点。连接各同面投影，可得 $A_1B_1C_1$、$A_2B_2C_2$、$A_3B_3C_3$。

图 5-2 a 为一般位置超平面 T 与特殊位置超平面 Ω（$/\!/\Sigma_1$）相交的示意图。

由于 $\Omega/\!/\Sigma_1$，因此利用同面迹线只能求出一个共有点。其交平面可按如下方法确定：由

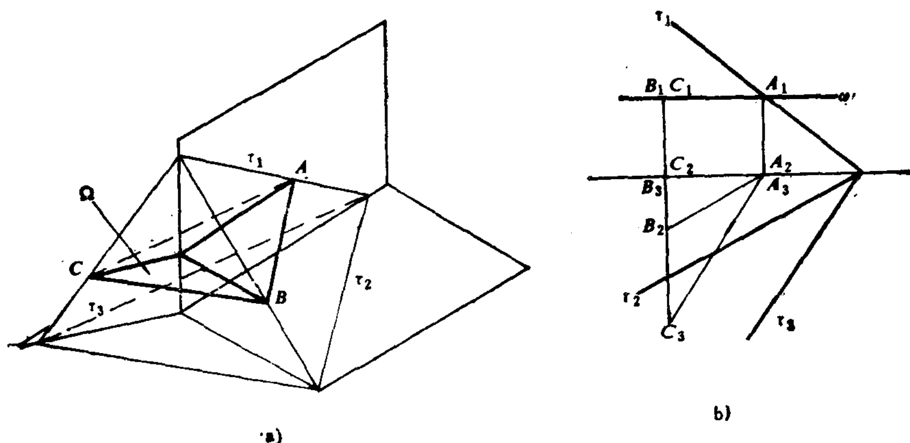


图5-2 一般位置超平面与特殊位置超平面相交

四维几何学可知，两平行超平面与平面相交，其交线相互平行。

设：$\Omega \times$ 迹面 $\tau_1\tau_2 = AB$

$\Sigma_1 \times$ 迹面 $\tau_1\tau_2 = \tau_2$

则 $AB /\!/ \tau_2$

同理，可得 $AC /\!/ \tau_3$，因此，$ABC /\!/ \tau_2\tau_3$ 或 $ABC /\!/ \Sigma_1$

图 5-2 b 为该交平面 ABC 的具体作图：

（1）由 τ_1 与 ω_1 求出共有点 A。

（2）由于 $AB /\!/ \tau_2$、$AC /\!/ \tau_3$，所以 A_1B_1、A_1C_1 平行于基线，并与 ω_1 重合；A_3B_3、A_2C_2 与基线重合；A_2B_2、A_3C_3 分别平行于 τ_2、τ_3。

由于$ABC /\!/ \Sigma_1$，所以 $(ABC)_1$ 反映实形，而A_2B_2、A_3C_3 分别反映 AB、AC 的实长。

图 5-3 为一般位置超平面 Λ 与垂直于 Σ_1 的超平面 T 相交时的具体作图。利用各同面迹线的交点，即可求出它们的交平面ABC。其中，A_2B_2 与 τ_2 重合，A_3C_3 与 τ_3 重合。

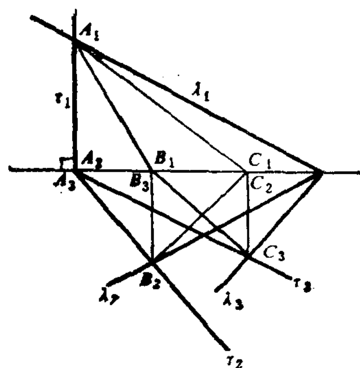


图5-3 一般位置超平面与特殊位置超平面相交

二、直线与超平面相交

由四维几何学可知，直线与超平面相交于点。现分两种情况来讨论：

（1）当超平面垂直于某一投影面时，它在该投影面上的投影具有积聚性。因此，直线与超平面的交点，可利用这一投影特性直接求得。如图 5-4 所示，超平面T垂直于 π_1，它与直线 MN 的交点K可直接求得，即 K_1 为 M_1N_1 与 τ_1 的交点。K_2、K_3 可由 K_1 求得。

（2）当直线与超平面均处于一般位置时，其交点可按下述步骤作图求得（见图5-5）：过已知直线 l 作辅助超平面 Λ，求出已知超平面T与辅助超平面Λ 的交平面 α。由于平面 α 与直线 l 共存于超平面 Λ内，因此可按三维画法几何的方法求得它们的交点K。点K即是所求直线 l 与超平面T的交点。

例 1 已知直线 MN 与超平面 $ABCD$ 相交，试求其交点K（见图5-6）。

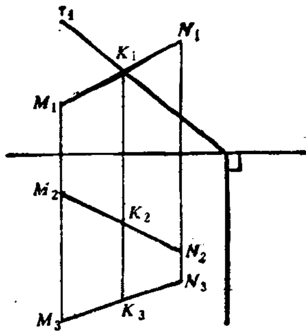


图5-4 直线与特殊位置超平面相交

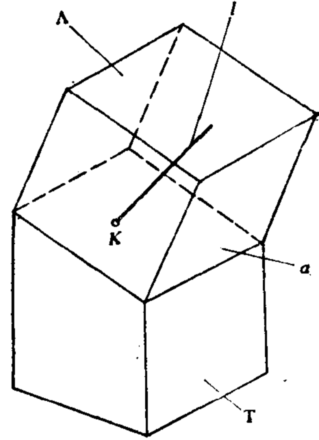


图5-5 确定直线与超平面的交点的示意图

解：

（1）过 MN 作辅助超平面 $\Lambda \perp \pi_1$

（2）分别求出 Λ 与 AB、BC、BD 的交点 E、F、G。连接各点得 EFG，即为 Λ 与 $ABCD$ 的交平面。

（3）由于 EFG 与 MN 共存于超平面 Λ 内，因此可按三维画法几何中直线与平面求交点的方法作图。此时，可把 π_2、π_3 上的投影分别视为三维画法几何中的 V、H 投影。图中 P_2 为求交点时所用的辅助面，先求出 K_2、K_3，再作出 K_1。此时，点 K 即为所求直线 MN 与超平面 $ABCD$ 的交点。

例 2 已知直线 MN 与超平面 Ω 相交，求其交点 K。

解：本题作图过程和方法与上例相同。如图 5-7 所示，其中，过直线 MN 所作的辅助超平面 $T \perp \pi_1$，T 与 Ω 的交平面为 ABC，P_2 为求交点 K 时所用的辅助面。

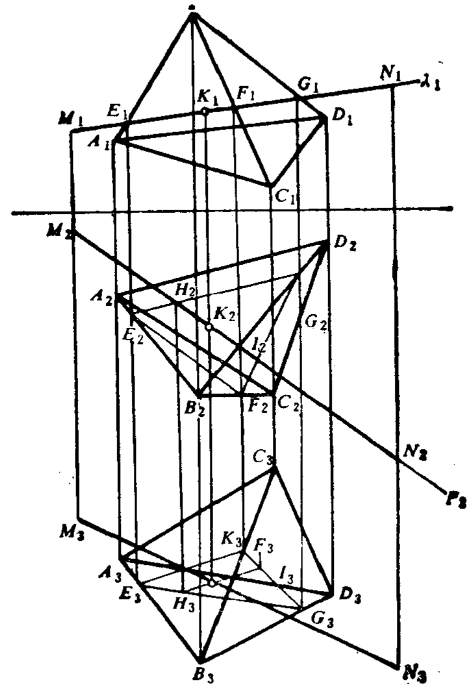


图5-6 确定直线与超平面的交点

三、两超平面相交

两超平面相交时，求其交平面的方法一般有以下几种：

（1）求出两超平面的面迹线，再求解。

（2）在一超平面上取三条直线，分别与另一超平面求交点，并连接各点。

（3）作辅助超平面与两已知超平面相交。由于三个超平面共线，可求出两已知超平面的一条共有线，因此，为了求出两已知超平面的交平面，需作两个辅助超平面。

现主要介绍第三种解题方法，图 5-8 为该方法的示意图。

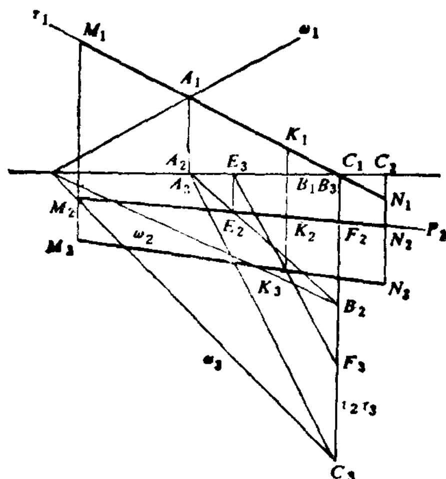


图5-7 确定直线与超平面的交点

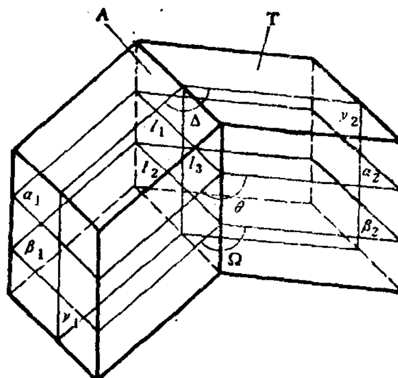


图5-8 确定两超平面的交平面的示意图

已知超平面Λ与T，先作辅助超平面θ，则

$$\theta \times \Lambda = \alpha_1$$

$$\theta \times T = \alpha_2$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = l_1 \qquad (\alpha_1\text{、}\alpha_2\text{共存于}\theta\text{内})$$

再作辅助超平面Ω（$\parallel\theta$），则

$$\Omega \times \Lambda = \beta_1$$

$$\Omega \times T = \beta_2$$

$$\beta_1 \times \beta_2 = l_2$$

（β_1、β_2共存于Ω内）

由于两辅助超平面θ、Ω互相平行，则$l_1 \parallel l_2$，即所求交平面由两平行线l_1、l_2所确定。

如果另作辅助超平面Δ（$\nparallel\theta$），则

$$\Delta \times \Lambda = \gamma_1$$

$$\Delta \times T = \gamma_2$$

$$\gamma_1 \times \gamma_2 = l_3 \qquad (\gamma_1\text{、}\gamma_2\text{共存在}\Delta\text{内})$$

由于两辅助超平面θ、Δ不平行，因此l_1与l_3相交，即所求的交平面由l_1、l_3两相交线所确定。

图 5-9 为确定超平面 *ABCD* 与 *EFGH* 的交平面的具体作图步骤：

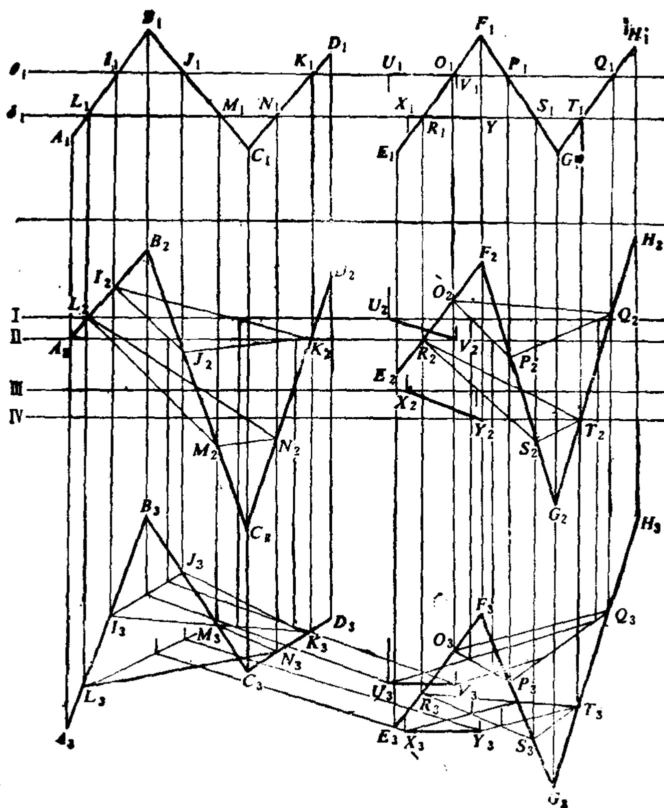


图5-9 确定两超平面的交平面

（1）作辅助超平面θ、Δ均平行于Σ_1。

（2）分别作出θ、Δ与$ABCD$、$EFGH$的交平面，即

$$\theta\times ABCD=IJK$$
$$\theta\times EFGH=OPQ$$
$$\Delta\times ABCD=LMN$$
$$\Delta\times EFGH=RST$$

（3）由于IJK和OPQ及LMN和RST分别共存于超平面θ、Δ内，因此可按三维画法几何方法分别求出IJK与OPQ及LMN与RST的交线。图中，先求出U_2V_2、U_3V_3及X_2Y_2、X_3Y_3，再求得U_1V_1及X_1Y_1。由两平行线UV、XY所决定的平面即为两超平面的交平面。

四、几何元素间相交问题的讨论

1. 平面ABC与超平面$DEFG$相交

确定平面与超平面的交线，一般可有以下途径：

（1）在ABC上任取两直线，分别与$DEFG$相交，可求得两个交点，其连线即为所求的交线。

（2）过ABC作辅助超平面，并求出它与超平面$DEFG$的交平面α。由于α与ABC共存于辅助超平面内，因此可用三维画法几何方法求出它们的交线MN。MN即为平面与超平面的交线。

有时，为了简明地表示解题步骤，可采用“框图”表示，如上述解题过程可表示如下：

[过ABC作辅助超平面] × [$DEFG$]

= [平面$\alpha\times ABC$] = [所求交线MN]

（3）作一辅助超平面，分别与ABC、$DEFG$相交，并求得交线l和交平面α。由于l与α共存于所作的辅助超平面内，因此可用三维画法几何方法作出它们的交点，即是ABC与$DEFG$的一个共有点。再另作一辅助超平面，求出另一共有点。它们的连线，即为所求的交线。

2. 直线与平面相交

由四维几何学可知，在四维空间中，如果直线与平面不共存于同一三维空间内，即使不平行也没有交点；如果有交点，则它们必共存于同一三维空间内。

图5-10中，平面$ABC\perp\pi_1$，直线MN为一般位置，从表面上看，似乎点K是它们的交点，但如果在平面ABC上取辅助线CD进行检验，发现K点不在平面ABC上，即K不是它们的交点。应该如何分析这一问题呢？我们知道，在三维画法几何中，当平面垂直于投影面时，它在该投影面上的投影为直线（具有积聚性）。然而，在四维空间中，当平面ABC垂直于投影面（如π_1）时，虽然其投影$A_1B_1C_1$也为一直线，但在概念上与三维画法几何中的情况有所不同，此时$A_1B_1C_1$不具有积聚性，即不在平面ABC上点，其投影也有可能落在该直线上。因此，$A_1B_1C_1$与M_1N_1的交点并不是直线与平面的交点的投影，而是由MN上的点K和平面ABC上的直线EF所确定的平面与π_1处于绝对垂直位置。

图5-11是直线和平面均处于一般位置的情况。过直线MN作辅助超平面T($\perp\pi_1$)，它

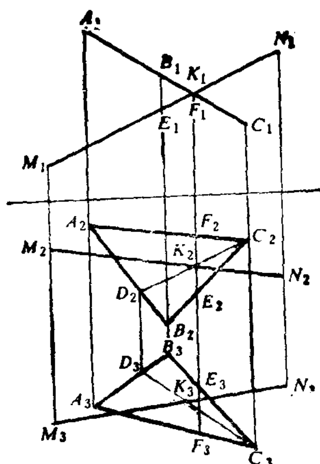


图5-10　直线与平面相交

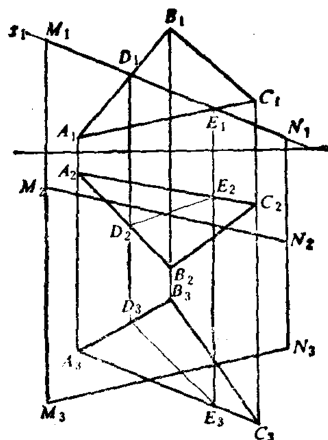


图5-11　直线与平面垂直

与 *ABC* 的交线为 *DE*。由于 *DE* 和 *MN* 共存于辅助超平面T内，因此 *DE* 和 *MN* 一般是不相交的；如果相交，则说明 *MN* 和 *DE* 必共存于同一平面内，即 *MN* 和 *DE* 所在的平面 *ABC* 共存于同一三维空间内。

3. 平面与平面相交

在四维空间中，如果两平面不共存于同一超平面，则它们相交于一点。如何确定其交点，是一个值得研究的问题。

设两平面为 *ABC* 和 *DEF*（图5-12），现分析如下：

（1）如果过一已知平面（如 *DEF*）上的直线（如 *DF*）作一辅助平面，由于它与另一已知平面 *ABC* 也相交于点，即使能求出它们的交点，但它一般不在 *DF* 上，因此，这个方法不能确定两平面的交点。

（2）如果任作一辅助平面，由于两已知平面与该辅助平面均交于点，即使能求出这两个交点，但它们一般是不会重合的。因此，这个方法也不能确定两平面的交点。

（3）如果任作一辅助超平面，由于该辅助超平面与两已知平面均交于直线，即使求出这两条交线（它们共存于上述辅助超平面内），但它们一般是不会相交的。因此，用这个方法也不能确定两平面的交点。

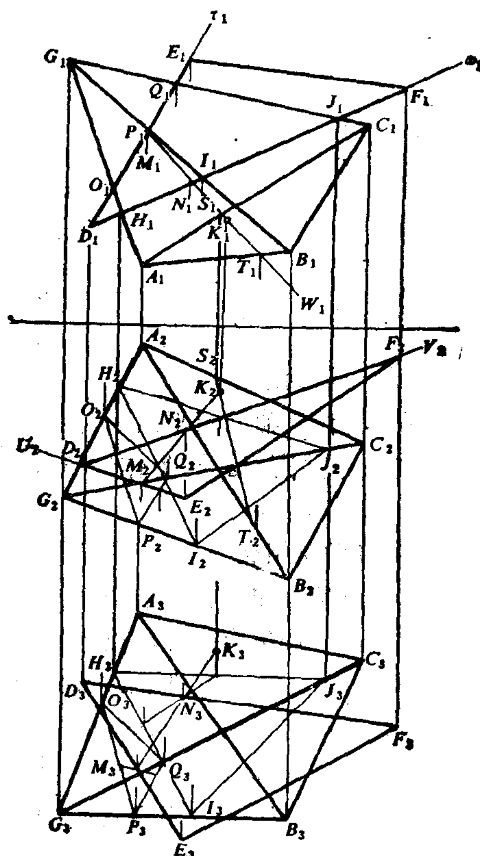


图5-12　两平面相交

（4）过已知平面（如 *ABC*）任作一超平面（可在平面 *ABC* 外任取一点 *G*，即 *ABCG*）。为了求出另一已知平面 *DEF* 与 *ABCG* 的交线 *MN*，可先分别求平面 *DEF* 上两直线 *DE*、

DF 与 $ABCG$ 的交点 M、N，再连接它们。可以看出，交线 MN 既在 DEF 内，又和 ABC 共存于 $ABCG$ 内。因此，只要 MN 与 ABC 不平行，就可以用三维画法几何方法求出它们的交点 K，它即是平面 ABC 与平面 DEF 的交点，详见图 5-12。图中，T、Ω分别是过 DE、DF 所作的辅助超平面；U_2、V_2、W_1 分别为按三维画法几何方法求 M、N、K 时所作的辅助平面。

第二节　从　属　问　题

在四维画法几何中，点和线仍具有“从属性”，即点若在直线上，则点的各投影必然在直线的同面投影上，这是几何元素间从属问题的基础。在四维画法几何各种从属问题的作图中，在超平面内取点是重要的基本作图方法之一。

在一些文献中，超平面内取点的过程是：先在超平面内取平面，再在该平面上取线，然后在线上取点。现通过具体例子来说明上述作图过程。

例 1　设点 K 在超平面 T 内，已知 K_1、K_3，求 K_2（图5-13）。

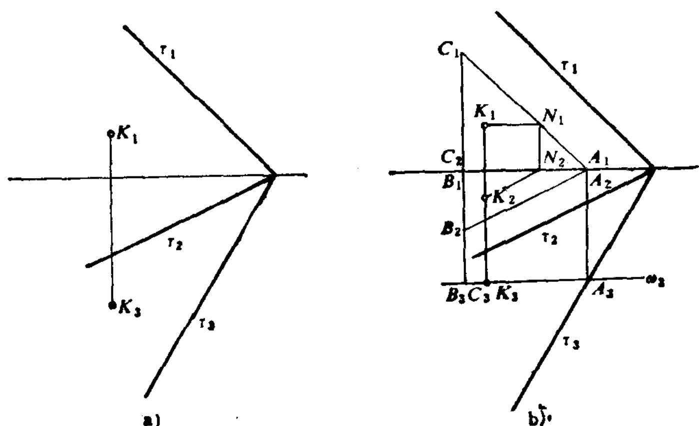


图5-13　超平面内取点

解：

（1）过 K 作辅助超平面 Ω（∥Σ_3），即过 K_3 作 ω_3 平行于基线，求出 Ω 与 T 的交平面 ABC，该平面既包含 K 又平行于 Σ_3。由于 ABC 从属于超平面 T，因此可将四维空间中超平面内的取点问题转化为平面 ABC 上的取点问题。

（2）由于 ABC 平行于迹面 $\tau_1\tau_2$，因此 A_1C_1、A_2B_2 可视为三维空间中平面 ABC 的两迹线。此时，可用三维画法几何方法由 K_1 求出 K_2。图中 K_1N_1、K_2N_2 为在该平面上取点时所用的辅助线。

在超平面内取点，还可以直接在超平面内作辅助线进行作图，其依据是：

（1）如果一条直线上有两个点在已知超平面内，则此直线就完全从属于该超平面。

（2）如果一点和超平面内任一点的连线与该超平面内的某一平面相交，则该点在超平面内。

现以例 2 及例 3 说明如何运用上述方法。

例 2　设点 K 在超平面 T 内，已知 K_1、K_3，求 K_2（图5-14）。

解：

（1）在超平面 T 内任取点 A，并与 K 相连接，则 AK 必然在 T 内。

（2）延长 AK，并求出它与 Σ_1 的迹点 B。为此，延长 A_1K_1 与基线相交于 B_1；同时延长 A_3K_3，由 B_1 求得 B_3。由于迹点 B 必定位于迹面 $\tau_2\tau_3$ 上，因此可按三维画法几何方法，

由 B_3 作辅助线（B_3M_3、B_2M_2）求得 B_2。

（3）连接 A_2B_2，从而求得 K_2。

例 3 已知点 K 和超平面 $ABCD$，试检查 K 是否在 $ABCD$ 内（图5-15）

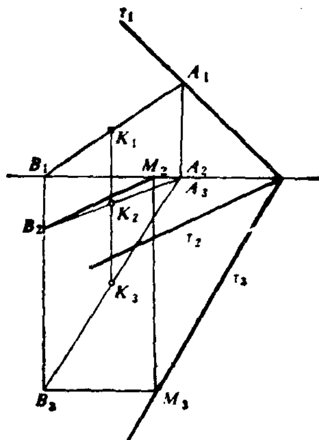


图5-14 超平面内取点

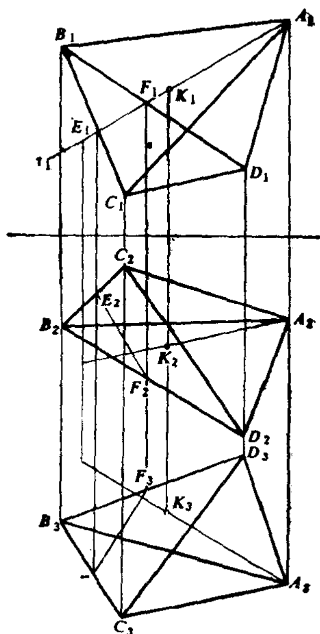


图5-15 检查点与超平面的从属

解：

（1）在超平面 $ABCD$ 内任取一点，如 A，并与 K 连接。

（2）检查 AK 与平面 BCD 是否有交点。如果有交点，则说明 AK 与 BCD 共存于 $ABCD$ 内，即 K 从属于 $ABCD$；如果 AK 与 BCD 不相交，则点 K 不从属于 $ABCD$。为此，过 AK 作辅助超平面 T（$\perp \pi_1$），与 BCD 的交线为 EF，由于 EF 与 AK 不相交，说明 AK 与 BCD 不相交，即 K 不在 $ABCD$ 内。

第三节 平 行 问 题

在四维空间中，几何元素之间的平行问题一般仅存在于直线与超平面、平面与超平面、超平面与超平面、平面与平面之间。其中，除平面与平面可存在半平行外，其余皆为完全平行。

一、直线与超平面平行

由四维几何学可知：如果一直线与已知超平面上一直线平行，则该直线与超平面平行。因此，可把直线与超平面平行时的一系列作图问题，转化成（或借助于）线与线的平行问题。

例 1 设直线 MN 平行于超平面 T，试补全 M_2N_2（图5-16）

解：

（1）在超平面 T 内取直线 $AB \parallel MN$。为此，在 τ_1 上取点 A，过 A_1 作 $A_1B_1 \parallel M_1N_1$，并使 B_1 在基线上，即 B 是 AB 与 Σ_1 的迹点。同时，过 A_3 作 $A_3B_3 \parallel M_3N_3$

（2）由于点B在迹面$\tau_2\tau_3$上，因此可按三维画法几何中平面上取点的方法，由B_3作辅助线（B_2D_2、B_3D_3）求得B_2。

（3）连接A_2B_2，并过M_2作$M_2N_2 /\!/ A_2B_2$。

例 2 已知直线MN平行于超平面T，求τ_2(图5-17)。

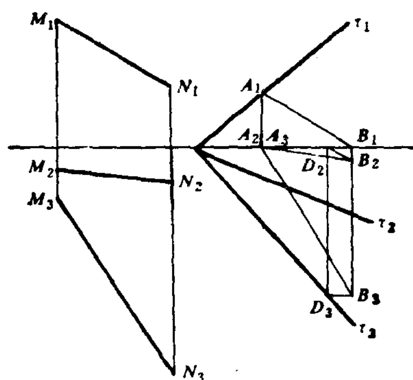


图5-16 根据直线平行于超平面确定直线的投影

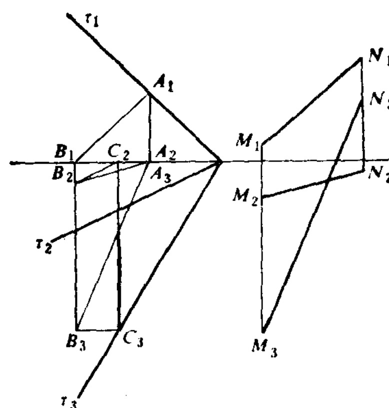


图5-17 根据直线平行于超平面确定超平面的迹线

解：

（1）在τ_1上取点A，再过A作$AB /\!/ MN$，并使B位于迹面$\tau_2\tau_3$上。

（2）按三维画法几何方法，即由B_3作B_3C_3平行于基线，并求得B_2C_2。

（3）作$\tau_2 /\!/ B_2C_2$，即为所求。

二、平面与超平面平行

由四维几何学得知，如果一平面与已知超平面内的一个平面平行，则平面必定与超平面平行。应指出，此两平面的平行属完全平行，因为它们共存于同一超平面内。因此，平面与超平面平行的一系列作图问题，同样可以转化成（或借助于）线与线的平行问题。

例 3 过点A作平面ABC与超平面T、Ω均平行，并使B、C位于Σ_1内（图5-18）。

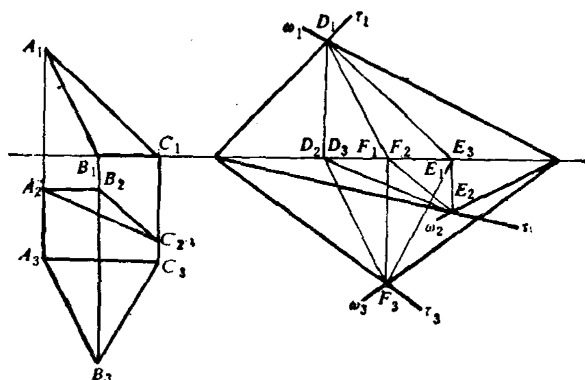


图5-18 过点作平面平行于两超平面

解：

（1）求出超平面T与Ω的交平面DEF。

（2）过A作平面$ABC /\!/ DEF$。其中，$AB /\!/ DF$，$AC /\!/ DE$，并使B、C位于Σ_1，则ABC即为所求。

三、两超平面平行

由四维几何学可知，两个互相平行的超平面与投影空间的交平面必定互相平行。

设T $/\!/$ Λ（如图 5-19 a 所示）。

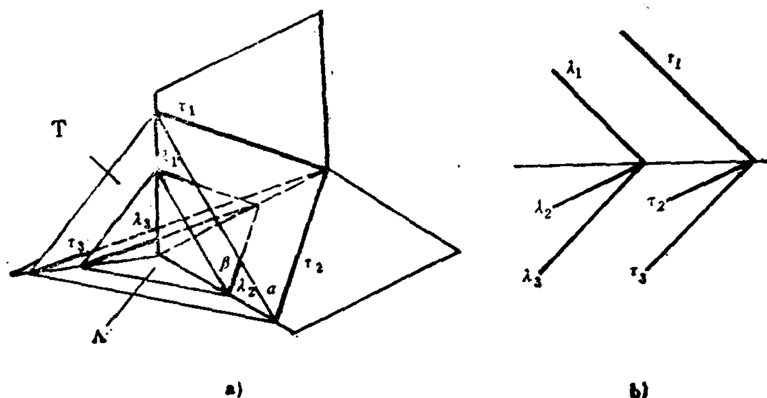


图5-19 两超平面相互平行

如果	$T \times \Sigma_3 = \alpha$ （即迹面 $\tau_1\tau_2$）
	$\Lambda \times \Sigma_3 = \beta$ （即迹面 $\lambda_1\lambda_2$）
则	$\tau_1\tau_2 /\!/ \lambda_1\lambda_2$
因此	$\tau_1 /\!/ \lambda_1$；$\tau_2 /\!/ \lambda_2$
同理，可得	$\tau_3 /\!/ \lambda_3$

由此，可得出如下结论：若两超平面相互平行，则它们的各同面迹线相互平行，如图5-19 b 所示。

上述结论也可由四维几何学中的另一定理得到解释：若过一点而不共面的三条直线分别平行于过另外一点而不共面的三条直线，则由两束直线所决定的超平面相互平行。

例 4 过点K作超平面Λ平行于已知超平面T（图5-20）。

图5-20 过点作超平面平行于已知超平面

解：

（1）过K作辅助线KM平行于超平面T上的任一直线，为简便起见，可取迹线，如使$KM /\!/ \tau_2$，M为KM与Σ_2的迹点，并位于所求的迹面$\lambda_1\lambda_3$上。由于$\lambda_1\lambda_3 /\!/ \tau_1\tau_3$，因此在四维空间中，过$K$作超平面平行于已知超平面，可先在三维空间$\Sigma_2$中，过$M$作迹面$\lambda_1\lambda_3 /\!/ \tau_1\tau_3$。

（2）过M另作辅助线$MN /\!/ \tau_3$（也可以平行τ_1），并求出MN与π_1的交点N，即得所求迹线λ_1上的点。

（3）过N作$\lambda_1 /\!/ \tau_1$，再作出$\lambda_2 /\!/ \tau_2$、$\lambda_3 /\!/ \tau_3$。实际上，上述两辅助线KM和MN所决定的平面，既包含K又平行于迹面$\tau_2\tau_3$，点N为该平面与π_1的交点。

第四节 垂直问题

由四维几何学可知：在四维空间中，直线垂直于直线、直线垂直于平面、直线垂直于超平面、相交于一点的垂直两平面，其垂直度均为1，即为完全垂直（或绝对垂直）；相交于

一直线的垂直两平面、平面垂直于超平面、其垂直度为1／2，即半垂直；超平面垂直于超平面，其垂直度为1／3。

本节主要介绍几何元素间的完全垂直问题。

一、完全垂直时的投影理论

定理1 四维空间中两直线相互垂直，如果其中一条直线平行于投影空间（或投影面），则它们在该投影空间（或投影面）的超投影（或投影）也相互垂直；反之，也成立[22]。现证明如下：

已知两直线 L_1、L_2 的方程为：

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}=\frac{u-u_1}{k_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}=\frac{u-u_2}{k_2}$$

当 $L_1 \perp L_2$ 时，则

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2=0$$

设 L_1 平行于投影空间 Σ_1，即 $l_1=0$；或 L_1 平行于投影面 π_3，即 $l_1=m_1=0$。

则有
$$m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2=0$$

或
$$n_1n_2+k_1k_2=0$$

由此可以看出，直线 L_1、L_2 在 Σ_1 的超投影（或在 π_3 上的投影）相互垂直。

推论：四维空间中两直线相互垂直，如果其中一直线平行于一投影空间，而另一直线平行于另一投影空间，则两直线在上述两投影空间所确定的投影面上的投影也相互垂直。

若 $L_1 /\!/ \Sigma_1$，即 $l_1=0$；$L_2 /\!/ \Sigma_2$，也即 $m_2=0$。

则有
$$n_1n_2+k_1k_2=0$$

由此可以看出，两直线 L_1、L_2 在 Σ_1、Σ_2 所确定的投影面 π_3 上的投影相互垂直。

图5-21为直线 $AB \perp CD$ 时，其投影为直角的几种情况：

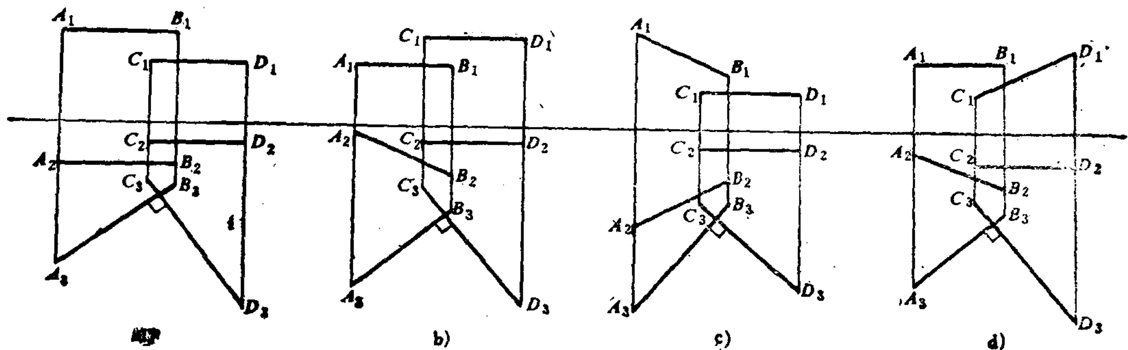


图5-21 两直线垂直时的几种情况

（1）图5-21 a 中，AB 与 CD 均平行于 π_3。

（2）图5-21 b 中，$AB /\!/ \Sigma_1$，$CD /\!/ \pi_3$。

（3）图5-21 c 中，AB 为一般位置，$CD /\!/ \pi_3$。

（4）图5-21 d 中，$AB /\!/ \Sigma_1$，$CD /\!/ \Sigma_2$。

定理2 四维空间中，两绝对垂直的平面在同一投影空间的超投影相互垂直[22]。现证

明如下：

设过原点的平面 α，则

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1u=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2u=0 \end{cases} \tag{5-1}$$

过点 M（x_m、y_m、z_m、u_m）并与平面 α 成绝对垂直的平面 β 的对称式方程为：

$$\frac{\begin{vmatrix} x-x_m & A_2 \\ y-y_m & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} y-y_m & B_2 \\ z-z_m & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} z-z_m & C_2 \\ u-u_m & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} u-u_m & D_2 \\ x-x_m & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}} \tag{5-2}$$

则平面 β 在 Σ_1 中的超投影为：

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}(y-y_m)+\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}(z-z_m)+\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}(u-u_m)=0 \tag{5-3}$$

其法线方向矢量为 $\boldsymbol{N}_1[(C_1D_2-D_1C_2)、(D_1B_2-B_1D_2)、(B_1C_2-C_1B_2)]$。

式（5-1）中消去 x（即为平面 α 在 Σ_1 中的超投影），则

$$(B_1A_2-A_1B_2)y+(C_1A_2-A_1C_2)z+(D_1A_2-A_1D_2)u=0$$

其法线方向矢量为 $\boldsymbol{N}_2[(B_1A_2-A_1B_2)、(C_1A_2-A_1C_2)、(D_1A_2-A_1D_2)]$。由于 $\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2=0$，则 $\boldsymbol{N}_1$ 与 $\boldsymbol{N}_2$ 相互垂直。

推论：已知两平面绝对垂直，若其中一平面垂直于一投影空间（另一平面则平行于同一投影空间），则它们在该投影空间的超投影呈"直线垂直平面"。反之，也成立。

图 5-22 中，$ABC \veebar CDE$，并相交于点 C，若 $ABC\perp\Sigma_1$，则 $CDE /\!/ \Sigma_1$。此时，它们在 Σ_1 的超投影 $(ABC)_1$ 与 $(DEF)_1$ 呈"直线垂直平面"。图中，C_2N_2 和 C_3M_3 平行于基线，而 $A_2B_2C_2\perp C_2M_2$；$A_3B_3C_3\perp C_3N_3$。

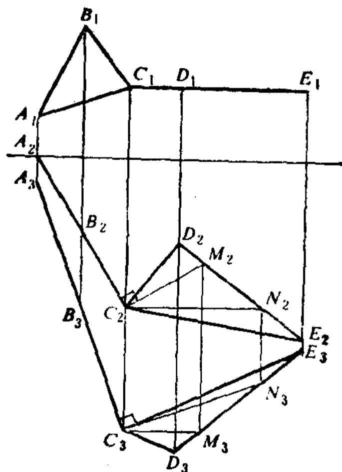


图5-22　两绝对垂直平面的超投影

二、直线垂直超平面

在四维几何中，直线垂直于超平面是一个非常重要的问题；在四维画法几何中，也是一个很重要的基本作图方法。

由四维几何学可知，如果直线垂直于超平面，则直线垂直于超平面内的所有直线。

设直线 AB 垂直于超平面 T，由于 τ_1、τ_2、τ_3 分别位于投影面 π_1、π_2、π_3 上，因此根据定理 1 得出：

$$A_1B_1\perp\tau_1;\quad A_2B_2\perp\tau_2;\quad A_3B_3\perp\tau_3$$

图 5-23 是直线 AB 垂直于超平面 T 的具体作图。它们的交点即为垂足（图中未画出）。

进一步分析可看出，直线垂直于超平面时，它们在各投影空间的超投影均相互垂直，即 $(AB)_1\perp\tau_2\tau_3$；$(AB)_2\perp\tau_1\tau_3$；$(AB)_3\perp\tau_1\tau_2$。

例 过点K作超平面Ω垂直于已知直线AB（图5-24）。

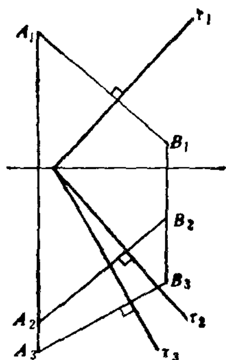


图5-23 直线垂直于超平面

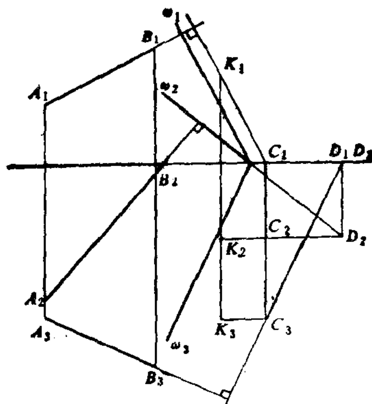


图5-24 过点作超平面垂直已知直线

解：

（1）过点K作辅助线KC垂直于AB。此时，$K_1C_1\perp A_1B_1$；K_2C_2、K_3C_3平行于基线。点C是KC与Σ_1的交点。

（2）过点$(C)_1$作迹面$\omega_2\omega_3$与$(AB)_1$垂直。其中，$C_3D_3\perp A_3B_3$，C_2D_2平行于基线。此时，$\omega_2\perp A_2B_2$，$\omega_3\perp A_3B_3$。

（3）作$\omega_1\perp A_1B_1$，则Ω即为所求。

三、直线垂直直线

在一般情况下，四维空间中两直线相互垂直，它们的投影不呈直角。在四维空间中，过一点作与已知直线垂直的直线，它们的集合即是超平面。因此，有关两直线垂直的作图问题往往需借助于辅助超平面。

例1 在平面ABC上取直线BD，使其与AB垂直，点D在AC上（图5-25）。

解：

在四维空间中，过已知直线AB上的点B并与该直线垂直的直线的集合是一超平面。该超平面过点B，并垂直于已知直线AB。由于所求直线在平面ABC上，因此过B所作的辅助超平面与已知平面ABC的交线即为所求。具体作图方法如下：

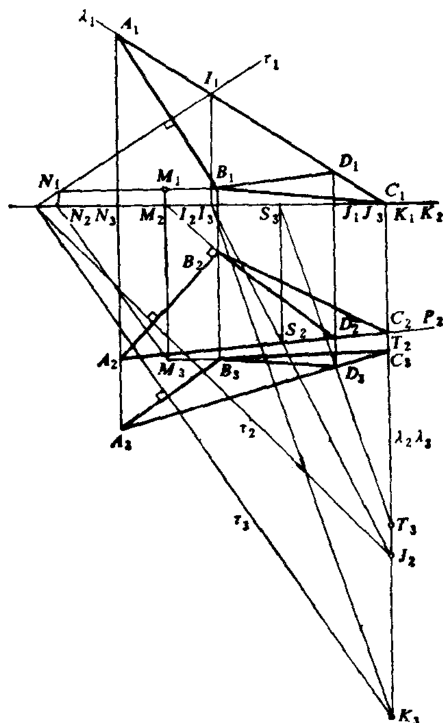


图5-25 在平面上取线垂直于已知直线

（1）过点B作辅助线BM，既平行于π_2，又垂直于AB，M是BM与Σ_2的交点。

（2）过M另作辅助线MN，既平行于π_3、又垂直于AB，N是MN与π_1的交点。

（3）过N作$\tau_1\perp A_1B_1$，再作$\tau_2\perp A_2B_2$、$\tau_3\perp A_3B_3$。所作辅助超平面T，既过点B，又垂直于AB。

（4）求辅助超平面T与已知平面 ABC 的交线 BD，并使 D 位于 AC 上。为此，过 AC 另作辅助超平面 $\Lambda(\perp\pi_1)$，并求出T与 Λ 的交平面 IJK。由于 AC 与 IJK 共存于 Λ 内，因此可用三维画法几何方法求出它们的交点 D。图中，P_2 为求交点 D 时所用的辅助平面。

（5）连接 B、D，即为所求。

本题的另一解题过程可以是：在适当位置任作一辅助超平面 $\perp AB$，并求它与 ABC 的交线。由于所作 BD 必须与该交线平行，因此过 B 作直线平行于上述交线也可求得 BD。

例2　已知 $AB\perp BC$，求 C_3（图5-26）。

解：

（1）过 B 作辅助超平面 $T\perp AB$，则 BC 必定在T内。图中 BM 和 MN 为作T时所用的辅助线。

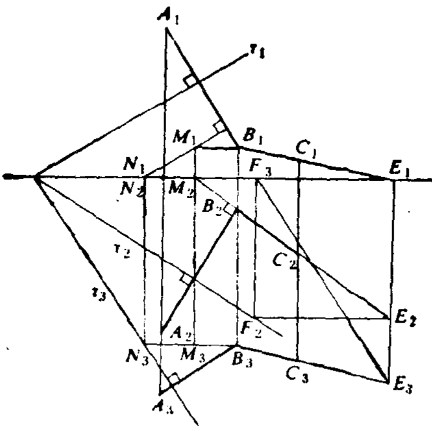


图5-26　已知两直线垂直求其投影

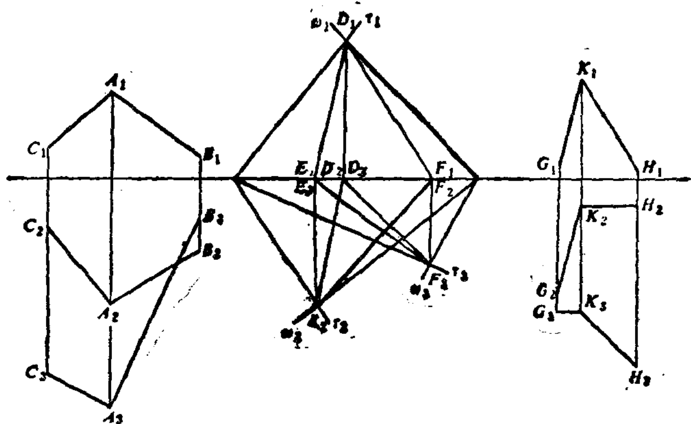


图5-27　过点作平面与已知平面绝对垂直（一）

（2）根据超平面内取点的方法，求 C_3。具体作图步骤是，延长 B_1C_1 与基线交于 E_1，即使点 E 位于 $\tau_2\tau_3$ 迹面上，并延长 B_2C_2，由 E_1 求得 E_2。再另作辅助线 $(EF)_1$（$E_2F_2\parallel$ 基线、$E_3F_3\parallel\tau_3$），求得 E_3。

（3）连接 B_3、E_3，便可确定 C_3。

四、两平面绝对垂直

研究四维空间中两平面绝对垂直的有关作图问题，不仅有助于加深理解四维几何学中有关两平面绝对垂直的定理和概念，而且还可以简化某些作图，尤其在解决几何元素之间的度量问题中有着广泛的应用。

在两平面绝对垂直的问题中，过已知点作平面与已知平面绝对垂直是一个重要而有用的基本作图方法。现具体介绍如下：

设已知平面 α（ABC）及定点 K，要求过 K 作平面 β 与 α 绝对垂直。

方法1：在已知平面 α 上任取两相交直线，然后过点 K 作两超平面分别与上述两相交直线垂直，两超平面的交平面即为所求，具体作图步骤如下（图5-27）：

（1）在适当的位置处作超平面T、Ω分别垂直于 AB、AC。

（2）求出T与Ω的交平面 DEF。

（3）过 K 作平面与 DEF 平行。为此，过 K 分别作 KG 平行于 DE；KH 平行于 DF。由 KG、KH 所决定的平面 β 即为所求。

（4）求 α 与 β 的交点，即得垂足(图中省略)。

方法2：包含已知平面 α 任作两辅助超平面，然后过定点作两直线分别垂直于上述两辅助超平面，则两垂线所决定的平面即为所求。具体作图步骤如下：(图 5-28)

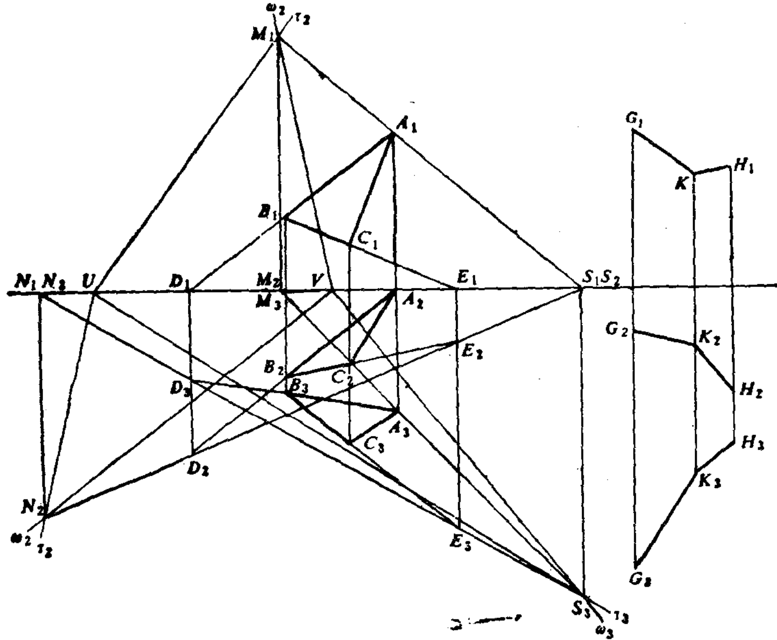


图5-28 过点作平面与已知平面绝对垂直（二）

（1）分别求出平面 α 上直线 AB、BC 与 Σ_1 的交点 D、E，而点 A 即是 AB 与 Σ_2 的交点。

（2）连接 D、E，并延长，求出 DE 与 π_2、π_3 的交点 N、S，即为平面 α 与 π_2、π_3 的交点。再连接 S、A 并延长，求出它与 π_1 的交点 M，即是平面 α 与 π_1 的交点。

（3）在基线上适当位置取点 U、V，并分别与 M、N、S 相连接，以作出包含平面 α 的两超平面 T、Ω，其中，UM、UN、US 即分别为 τ_1、τ_2、τ_3；而 VM、VN、VS 即分别为 ω_1、ω_2、ω_3。

（4）过点 K 分别作 T、Ω 的垂线 KG、KH，由 KG、KH 所决定的平面 β 即为所求。

方法3：由定理2可知，若 $\alpha \veebar \beta$，则它们在各投影空间的超投影相互垂直，即 $(\alpha)_1 \veebar (\beta)_1$；$(\alpha)_2 \veebar (\beta)_2$；$(\alpha)_3 \veebar (\beta)_3$。具体作图步骤如下：(图 5-29)

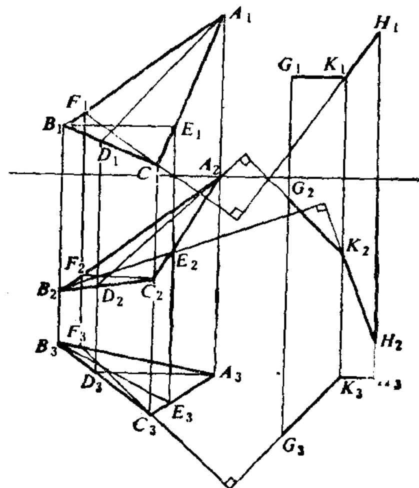


图5-29 过点作平面与已知平面绝对垂直（三）

（1）在平面 ABC 上取直线 $AD \parallel \Sigma_3$；$BE \parallel \Sigma_1$；$CF \parallel \Sigma_2$。

（2）在 Σ_1 中，过 (K_1) 作 $(KG)_1 \perp (ABC)_1$。其中，$K_2G_2 \perp A_2D_2$；$K_3G_3 \perp C_3F_3$。根据定理1可知，要使 KG 垂直于 ABC 上的所有

直线，KG必须平行于Σ_1，即K_1G_1平行于基线。

（3）在Σ_3中，过K_3作$(KH)_3\perp(ABC)_3$。其中，$K_2H_2\perp B_2E_2$；$K_1H_1\perp C_1F_1$。同理，要使KH垂直于ABC上的所有直线，KH必须平行于Σ_3，即K_3H_3平行于基线。

（4）所求平面β，即由两相交直线KG、KH所确定。

如果已知平面α垂直于一投影空间，过点K作平面β ⊻ α的作图方法如图5-30所示。图中，已知平面$\alpha(ABC)\perp\Sigma_1$，则过K所作平面β必须平行于Σ_1，具体作图步骤如下：

（1）过K_2作$K_2G_2\perp A_2C_2$（或A_2B_2），K_1G_1、K_3G_3均平行于基线。

（2）过K_3作$K_3H_3\perp A_3C_3$（或A_3B_3），K_1H_1、K_2H_2均平行于基线。

（3）由KG、KH两相交线所决定的平面即为所求。

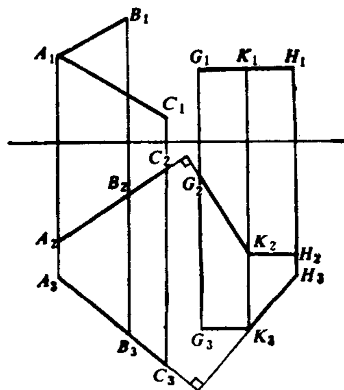


图5-30　过点作平面与已知平面绝对垂直（四）

五、直线垂直平面

在四维空间中，直线垂直于平面一般是交错的，即直线与平面既不平行又不相交。由四维几何学可知，过定点作直线垂直于已知平面可有无穷多个解。即过一定点与已知平面垂直的所有直线，组成一个平面，它与已知平面绝对垂直。应指出，这个概念在具体作图中是很重要的。

六、平面垂直超平面

根据四维几何学中平面垂直于超平面的有关定理，可以归纳出平面垂直于超平面的作图依据是：若一平面包含了一超平面的垂线，或一超平面包含了一平面的绝对垂直平面，则平面与超平面垂直。

据此，关于平面垂直于超平面中存在唯一解的基本作图步骤有以下两种情况：

（1）若已知直线不垂直于已知超平面，则过该直线可以作出唯一的平面与已知超平面垂直。其作图过程是：过已知直线上任意一点，作一直线垂直于已知超平面，则它与已知直线所确定的平面即为所求。

（2）若已知直线与已知平面不垂直，则过该直线可以作出唯一的超平面垂直于已知平面。其作图过程是：过已知直线上任意一点，作一平面与已知平面绝对垂直，则所作平面与已知直线所确定的超平面即为所求。

七、超平面垂直超平面

若已知平面与已知超平面不垂直，则过该平面可以作出唯一的超平面与已知超平面垂直。其作图过程是：过已知平面上任意一点，作一直线垂直于已知超平面，则该直线与已知平面所确定的超平面即为所求。

第五节　综合问题分析

在四维空间中，几何元素间相对位置的综合问题的解题分析方法必须建立在四维几何学

的基础上，否则，很容易产生错误的结论。例如，在三维空间中，过一点可引一直线与两交错直线均相交，而在四维空间中，同样问题是否有解呢？图 5-31 中，已知点K、直线AB、CD，它们不共存于一三维空间。虽然K点与CD可构成一平面，即过K可引无数条直线与CD相交，但由于平面KCD与直线AB不共存于一三维空间，因此直线AB与平面KCD不存在交点，所以本题无解。如果把K与AB也连成一平面，此时KAB与KCD只有一个交点，即它们相交于K。

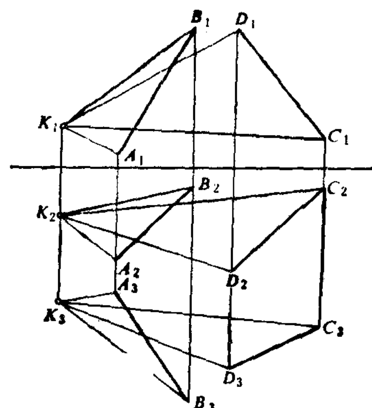


图5-31　综合题分析（一）

例 1　如图 5-32 所示，过点K作直线KMN，与已知直线AB交于M，并与平面CDE交于N。设K、AB及CDE不共存于同一三维空间。

解：

过点K与平面CDE相交的直线的集合是一个超平面，即由$KCDE$所确定的超平面。过K与直线AB相交的直线的集合是一个平面，即由KAB所确定的平面。因此，KAB与$KCDE$相交所得的交线即为所求直线KMN。这一解题方法还可简化为：点K与CDE构成一超平面$KCDE$，求出AB与$KCDE$的交点，K与所得的交点相连接，即为所求，具体作图步骤如下：

（1）K与CDE相连接，构成一超平面$KCDE$。

（2）过AB作辅助超平面T（$\perp\pi_1$），求出AB与$KCDE$的交点M。

（3）连接K、M，并延长，由于KM与CDE共存于一超平面$KCDE$内，如果它们不平行，则必然有交点，而且可按三维画法几何的方法进行作图。图中Q_3为求交点时所作的辅助面，求出其交点N，则直线KMN即为所求。

例 2　如图 5-33 所示，过点K作直线KD，既与超平面T平行，又与直线AB相交于

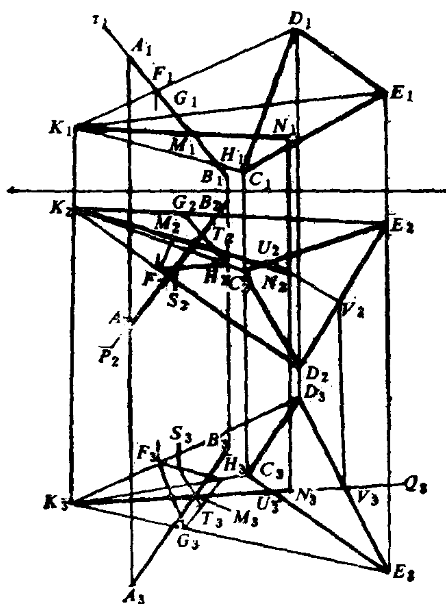


图5-32　综合题分析（二）

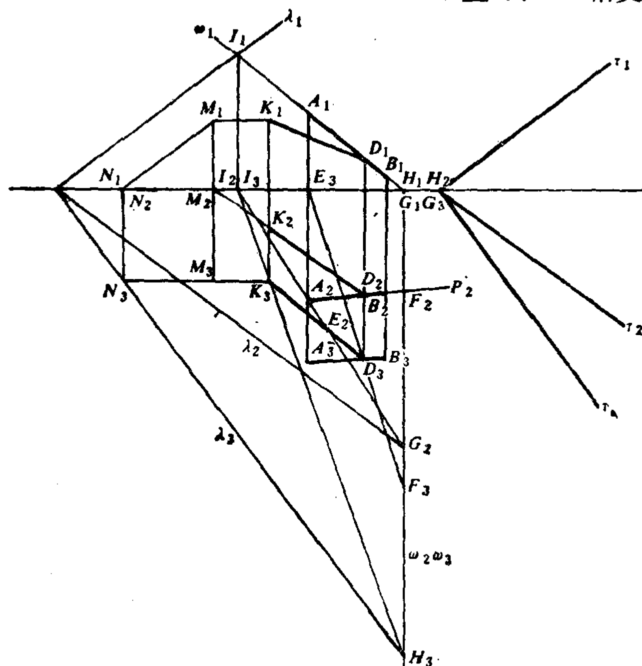


图5-33　综合题分析（三）

D。设 $AB \not\parallel$ T。

解：

过K并与超平面T平行的直线的集合是一超平面。该超平面既过K又平行于T，因此，求出AB与上述超平面的交点，并与K相连接，即为所求。具体作图步骤如下：

（1）过K作辅助超平面$\Lambda \parallel$ T，图中KM、MN为作Λ时所用的辅助线。

（2）过AB作辅助超平面Ω（$\perp \Pi_1$），Ω与Λ的交平面为GHI，它与AB的交点D即为AB与Λ的交点。

（3）连接K、D，即为所求。

例3 如图5-34所示，过点K作直线KM，使其既平行于已知超平面T、又垂直于已知平面ABC，并使M位于Σ_1内。

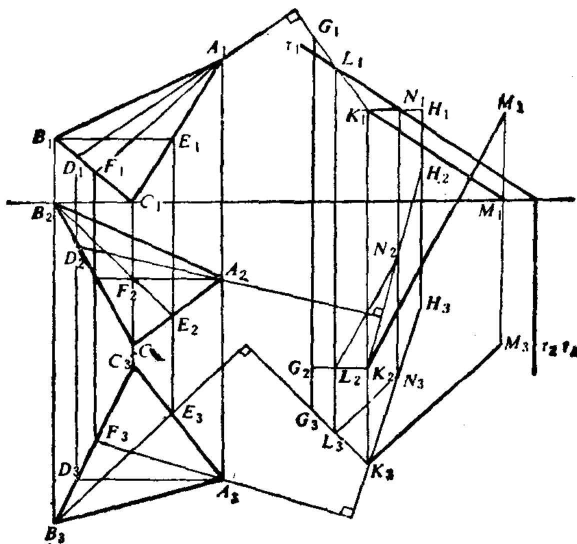


图5-34 综合题分析（四）

解：

（1）过K并与ABC垂直的直线的集合是一平面，该平面与ABC绝对垂直。为此，过K作平面$KGH \veebar ABC$。

（2）求出KGH与T的交线LN。

（3）过K作$KM \parallel LN$，并使M位于Σ_1内，则KM即为所求。

第六章　投影空间的变换及其应用

为了简便地解决四维空间中一些定位问题和度量问题，可采用变换投影空间的方法来改变几何元素与投影空间（或投影面）的相对位置，使四维空间中的几何元素处在有利于解题的位置。

第一节　基本概念和方法

一、基本概念

所谓变换投影空间，就是几何元素在四维空间中的位置保持不变，通过变换投影空间，改变几何元素与投影空间的相对位置，以达到有利于解题的目的。

1．投影空间的变换

变换投影空间时，每次变换一个投影空间。如图6-1中，原体系为Σ_1、Σ_2、Σ_3，现设Σ_2、Σ_3不变，以建立新的投影空间Σ_{11}替换Σ_1（规定：Σ_{11}表示Σ_1第一次变换后的投影空间并以$\Sigma_1 \to \Sigma_{11}$表示新投影空间Σ_{11}替换原投影空间Σ_1）。上述变换中，由$(\Sigma_1、\Sigma_2、\Sigma_3) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_2、\Sigma_3)$，变换后，$\Sigma_{11}$与$\Sigma_2$、$\Sigma_3$仍互相垂直。

同样，Σ_1、Σ_2、Σ_3可变换成Σ_1、Σ_{21}、Σ_3或Σ_1、Σ_2、Σ_{31}。

投影空间的变换，可以根据需要连续多次进行，如$(\Sigma_1、\Sigma_2、\Sigma_3) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_2、\Sigma_3) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_2、\Sigma_{32}) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_{23}、\Sigma_{32})$……等。

2．投影面的变换

变换投影空间时，两不变投影空间所确定的投影面不变，而新投影空间与两不变投影空间所确定的投影面均改变。现以$(\Sigma_1、\Sigma_2、\Sigma_3) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_2、\Sigma_3)$为例（见图6-1）。由于$\Sigma_2$、$\Sigma_3$不变，所以$\pi_1$不变。而$\Sigma_1 \to \Sigma_{11}$时，$\pi_2 \to \pi_{21}$；$\pi_3 \to \pi_{31}$（$\pi_{21}$、$\pi_{31}$分别表示$\pi_2$、$\pi_3$的第一次变换）。

3．基线的变换

由于基线RL是原体系中三个投影空间的交线，因此当投影空间变换后，基线也随着改

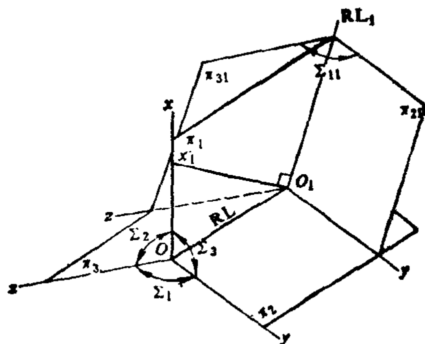


图6-1　变换投影空间的示意图

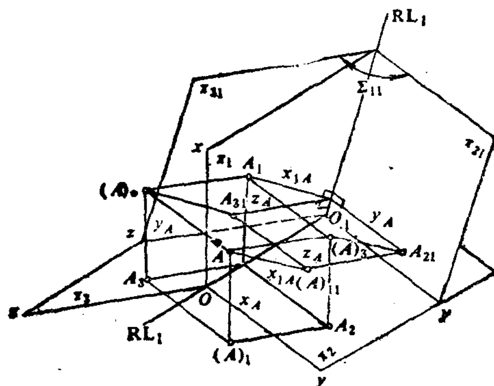


图6-2　点变换时的示意图

变。如(Σ_1、Σ_2、Σ_3)→(Σ_{11}、Σ_2、Σ_3) 时，它的基线由 RL 变换为 RL_1（下标 1 表示基线的第一次变换），如图 6-1 所示。

4. 坐标及超投影的变换

投影空间变换时，四维空间中点 A 与新投影空间的距离也随着改变，而点与不变投影空间的距离仍不变。如图 6-2 中，(Σ_1、Σ_2、Σ_3)→(Σ_{11}、Σ_2、Σ_3) 时，点 A 到 Σ_2、Σ_3 的距离不变，即 A 的 y、z 坐标不变，因此点 A 在 Σ_2、Σ_3 中的超投影 $(A)_2$、$(A)_3$ 不变；而点 A 到 Σ_1 的距离改变，即 A 的 x 坐标变为 x_1，因此 A 在 Σ_1 中的超投影 A_1 变为 A 在 Σ_{11} 中的超投影 A_{11}。

应当指出，在上述变换投影空间时，点 A 到 Σ_4 的距离 u 也可随之而改变。

5. 投影的变换

图 6-2 中，当(π_1、π_2、π_3)→(π_1、π_{21}、π_{31}) 时，相应的投影也随之而改变，即 (A_1、A_2、A_3)→(A_1、A_{21}、A_{31})，其中，A_{21}、A_{31} 表示 A_2、A_3 第一次变换后的新投影，A_1 称为不变投影。

二、点的变换及其变换规律

图 6-3 中，A_1、A_2、A_3 为原体系中的投影，RL 为原基线。现设(Σ_1、Σ_2、Σ_3)→(Σ_1、Σ_2、Σ_{31})，RL_1 为新基线，RL_1 上所加"短线"表示在新体系中该区域内的坐标值为负值。其选取的原则以尽量减少幅面上图线的交错或重叠为前提。应注意，在新体系中各投影坐标值的正负，与变换前保持不变。图中，由于 Σ_3→Σ_{31}，所以 A_3 为不变投影，A_3 到 RL_1 的距离 z_1 为 A 到 Σ_{31} 的距离。为求得新投影 A_{11}、A_{21}，由 A_3 引 RL_1 的垂线，并根据不变坐标 x、y 的大小和正负，在所作垂线上量取，得 A_{11}、A_{21}。

如果再进行第二次变换，设由(Σ_1、Σ_2、Σ_{31})→(Σ_1、Σ_{22}、Σ_{31})，即表示第二次变换中，Σ_1、Σ_{31} 不变，而 Σ_2→Σ_{22}。此时，A_{21} 不变，RL_2 为第二次变换后的基线，由不变投影 A_{21} 向 RL_2 引垂线，并根据 A_{11}、A_3 到 RL_1 的距离 x、z_1（均为正值）量得 A_{12}、A_{32}（均表示第二次变换中的新投影）。

如果需要更多次变换投影空间，其作图原则和方法均相同。

现将点的投影变换规律归纳如下：

（1）在新体系中的三个投影的连线垂直于新基线。

图6-3 点的变换规律

图6-4 点的变换

（2）变换投影空间时，决定新投影空间的两个投影面上的投影也随着改变。但是，新投影到新基线的距离不变。不变投影到新基线的距离反映点到新投影空间的距离。

设原三个投影空间为Σ_i、Σ_j、Σ_k，当$\Sigma_j \to \Sigma_{j1}$时，$(A)_j \to (A)_{j1}$，即$A_i \to A_{i1}$，$A_k \to A_{k1}$。由于Σ_i、Σ_k不变，因此A_j不变。

（3）新体系中各投影的坐标值的正、负，应与变换前保持不变。

例 试通过变换，使点A在新体系中位于Σ_{31}。

解：

点A在新体系中位于Σ_{31}，即通过变换使A到Σ_{31}的距离为零。另外，当$\Sigma_3 \to \Sigma_{31}$时，A_3为不变投影。因此，RL_1的设立应通过A_3，并求出新投影A_{11}、A_{21}，如图6-4所示。

图6-4中，还表示了进行第二次变换投影空间的情况，即使A位于新投影面π_{12}上，也就是使A既位于Σ_{31}、又位于Σ_{22}。此时，不变投影为A_{21}，并使RL_2通过A_{21}，再求得新投影A_{12}、A_{32}。此时，A_{32}与RL_2重合。

第二节 直线的投影变换

直线的投影变换，实际上是变换直线上任意两点的投影。

一、直线的基本变换

1. 一般位置直线变换成平行于某一新投影空间

图6-5中，AB为一般位置直线。如设$AB \parallel \Sigma_{31}$，则应使不变投影A_3B_3到新基线RL_1的距离相等，即使$A_3B_3 \parallel RL_1$，再按投影变换规律求得$A_{11}B_{11}$、$A_{21}B_{21}$。此时，AB在新体系Σ_1、Σ_2、Σ_{31}中平行于Σ_{31}。因此，由一般位置直线变换为平行于一新投影空间，只需变换一次。

2. 一般位置直线变换成平行于一新投影面

要使一般位置直线变换成平行于某一投影面（或垂直于一新投影面），也就是使该直线平行于确定该投影面的两个投影空间。为此，需要变换两次，第一次使直线平行于一新投影空间，第二次使直线又平行于另一新投影空间。

图6-6为变换一般位置直线AB，使其平行于π_{22}的具体作图步骤。

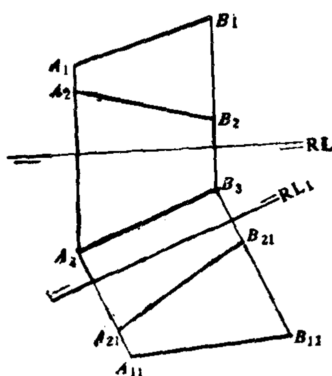


图6-5 直线的基本变换（一）

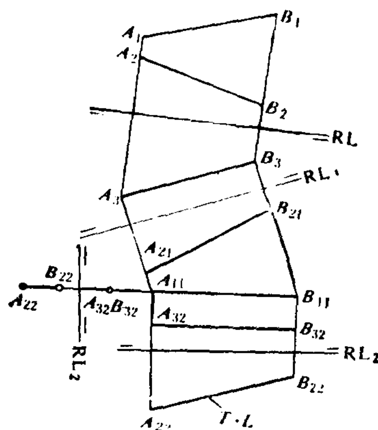


图6-6 直线的基本变换（二）

第一次变换，由(Σ_1、Σ_2、Σ_3)→(Σ_1、Σ_2、Σ_{31})、$RL_1 /\!/ A_3B_3$，并求得新投影 $A_{11}B_{11}$、$A_{21}B_{21}$，此时，$AB /\!/ \Sigma_{31}$。

第二次变换，由（Σ_1、Σ_2、Σ_{31})→(Σ_{12}、Σ_2、Σ_{31})，$RL_2 /\!/ A_{11}B_{11}$，并求得新投影 $A_{22}B_{22}$、$A_{32}B_{32}$。两次变换后，使 AB 平行于 Σ_{31} 与 Σ_{12} 所确定的投影面 π_{22}。因此，$A_{22}B_{22}$ 反映 AB 的实长。

一直线若垂直于一投影面，则必然平行于与该投影面绝对垂直的另一投影面。因此，由一般位置直线变为垂直于一投影面，也需要变换两次，其具体作图步骤见图 6-6：

第一次变换，使 $AB /\!/ \Sigma_{31}$。

第二次变换，由(Σ_1、Σ_2、Σ_{31})→(Σ_{12}、Σ_2、Σ_{31})，作$RL_2 \perp A_{11}B_{11}$，使 $A_{32}B_{32}$ 成为一点，即 $AB \perp \pi_{32}$。

3. 一般位置直线变换成垂直于一新投影空间

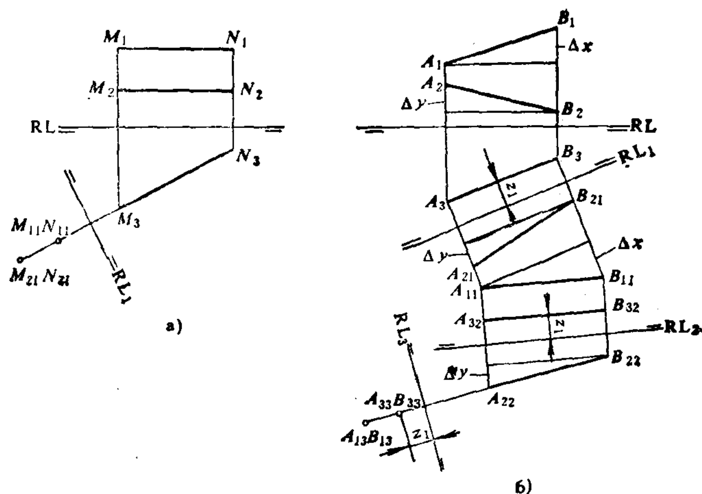


图6-7 直线的基本变换（三）

显然，直线由平行于一投影面变为垂直于一新投影空间，需变换一次如图 6-7 a 所示。因此，由一般位置直线变为垂直于一投影空间，需变换三次，具体作图步骤如图6-7 b 所示。其中，第一次变换，使 $AB /\!/ \Sigma_{31}$；第二次变换，使 $AB /\!/ \pi_{22}$；第三次变换，由（Σ_{12}、Σ_2、Σ_{31})→(Σ_{12}、Σ_{23}、Σ_{31})，$RL_3 \perp A_{22}B_{22}$，即 $AB \perp \Sigma_{23}$。此时，$A_{13}B_{13}$、$A_{33}B_{33}$ 均为点。

二、投影空间变换时的简化作图

为了说明简化作图方法，现将图 6-7 b 中的作图过程用图 6-8 中的“框图”表示，具体说明如下：

第一次变换时，$A_{11}B_{11}$（在“框图”中以“11”表示，下同）是根据 A_1、B_1 间的坐标值之差 Δx 确定；A_{21}、B_{21} 是根据 A_2、B_2 间的坐标值之差 Δy 确定。在第二次变换时，$A_{22}B_{22}$ 是根据 $A_{21}B_{21}$ 的坐标值之差（也是 Δy）确定。这说明在第一次变换中，如果未作出 $A_{21}B_{21}$，而在第二次变换中根据 A_2B_2 的坐标值之差 Δy 也可确定 $A_{22}B_{22}$。

同理，由于 A_3B_3 到 RL_1 的距离 z_1（或坐标差）和 $A_{32}B_{32}$ 到 RL_2 的距离（或坐标差）相等，因此在第三次变换中确定 $A_{33}B_{33}$ 时，即使在第二次变换中未作出 $A_{32}B_{32}$，也可由 A_3B_3 到 RL_1 的距离 z_1 来确定。以上即是投影变换中简化作图的依据。由此类推，可将上述简化作图方法用于更多次的变换中。

图 6-9 是图 6-7 的简化作图。为了适应简化作图方法的需要，对一些基线符号、投影名称等的规定如下：

（1）原基线 RL 省略，设 RL_1、RL_2 分别为 A_1B_1、A_2B_2 的基线。第一次变换时的基线为 RL_3。

（2）在简化作图时，由于不考虑坐标的正负，因此在基线上可省略区分正负的标记。

（3）第一次变换时所得的新投影用 A_4B_4 表示，第二次变换时所得的投影用 A_5B_5 表

示，依次类推。

在图 6-9 中，可进一步看出，在简化作图时新投影和原投影之间存在着以下关系：

设四维空间中的几何元素为点 D，第 n 次变换时所设置的基线为 RL_{n+2}，所得的新投影为D_{n+3}，它由投影 D_n 到 RL_n 的距离（或坐标差）所确定，即：

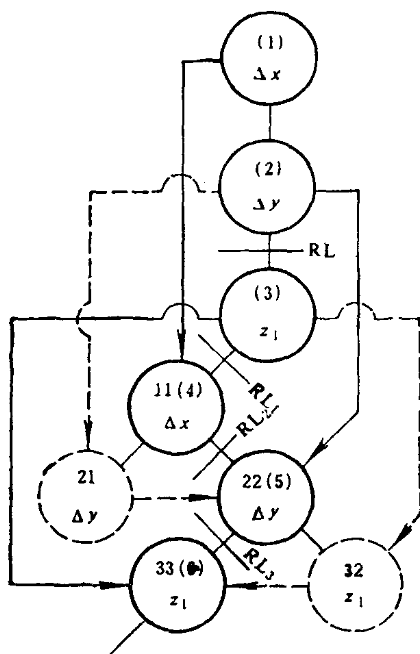


图6-8　简化作图的原理图

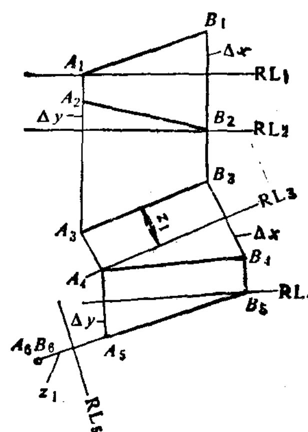


图6-9　直线变换的简化作图

投影 D_4，由投影 D_1 到 RL_1 的距离（或坐标差）所确定。

投影 D_5，由投影 D_2 到 RL_2 的距离（或坐标差）所确定。

……………………

投影 D_{10}，由投影 D_7 到 RL_7 的距离（或坐标差）所确定。

上述简化作图方法的优点是：可减化作图线；图线无重叠；作图时不必考虑坐标的正负。缺点是：由于省略了一些投影，因此在变换过程中几何元素与投影空间（或投影面）的相对位置的变化情况，不能清楚地反映出来，这就给初学者造成一定的困难。

简化作图方法也可应用于平面及超平面的投影变换中。

第三节　平面的投影变换

一、一般位置平面变换成半垂直于一新投影面

要使平面由一般位置变换成半垂直于一新投影面（或半平行于一新投影面），只要变换平面上一直线，使其垂直于一新投影面即可。由直线的基本变换方法可知，如果在平面上所取的辅助线平行于一投影空间，则只需变换一次，可使该辅助线垂直于一新投影面。因此，由一般位置平面变为垂直于一新投影面（或半平行于一新投影面），只需变换一次。

图 6-10 中，ABC 为一般位置平面，取辅助线 $AD /\!/ \Sigma_2$，并设 $RL_1 \perp A_3D_3$，可求得新投

影 $A_{21}B_{21}C_{21}$ 为一直线，即$ABC \perp \pi_{21}$（图中右方）。如果另设 $RL_1 \parallel A_3D_3$（图中下方），则使 $AD \parallel \pi_{11}$，根据平面半平行于投影面的定义可知，ABC 半平行于 π_{11}。

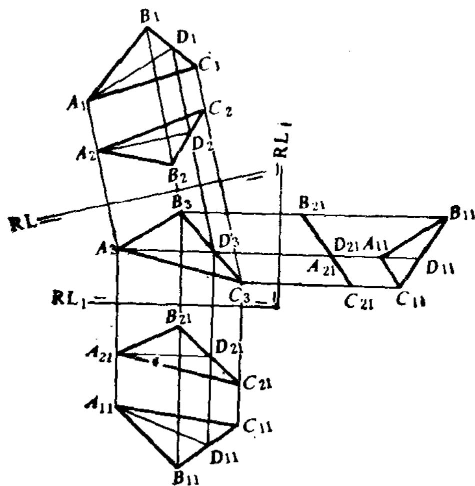


图6-10 平面的基本变换（一）

二、一般位置平面变换成平行于一投影空间

从图 6-11 a 中可看出：平面由半垂直于一投影面变为平行于一投影空间，只需变换一次。因此，平面由一般位置变为平行于一新投影空间，需变换两次，图 6-11 b 为其具体作图步骤：

（1）在 ABC 上取辅助线$CD \parallel \Sigma_1$。

（2）第一次变换时，取$RL_1 \perp C_2D_2$，使 ABC 半垂直于 π_{11}。

（3）第二次变换时，作 $RL_2 \parallel A_{11}B_{11}C_{11}$，使 $ABC \parallel \Sigma_{12}$。

三、一般位置平面变换成垂直一新投影空间

如果使平面上的一直线，变换成垂直于一新投影空间，则此平面垂直于该投影空间。由直线的基本变换方法可知，如果在平面上所取的辅助线平行于一投影空间，则只需变换两次，即可使上述辅助线垂直于一新投影空间。图 6-12 为一般位置平面变换成垂直于一新投影空间的具体作图步骤：

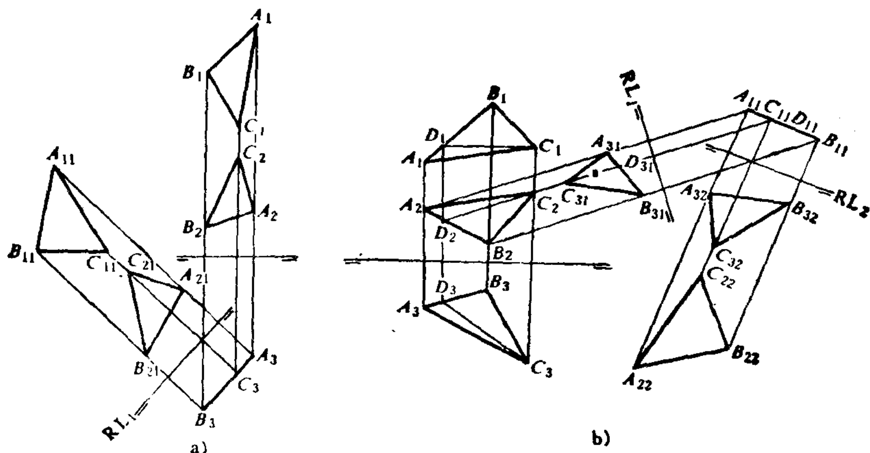


图6-11 平面的基本变换（二）

（1）在 ABC 上取辅助线 $CD \parallel \Sigma_1$。

（2）作 $RL_1 \parallel C_3D_3$，使 ABC 半平行于 π_{21}。

（3）作 $RL_2 \perp C_{21}D_{21}$，使 $ABC \perp \Sigma_{22}$。

四、一般位置平面变换成既半平行又半垂直于一新投影面

如果平面上有一直线 m 平行于一投影面，而平面上另一直线 n 又垂直于用一投影面，则上述平面既半平行又半垂直于该投影面，并且 m 必定垂直于 n。

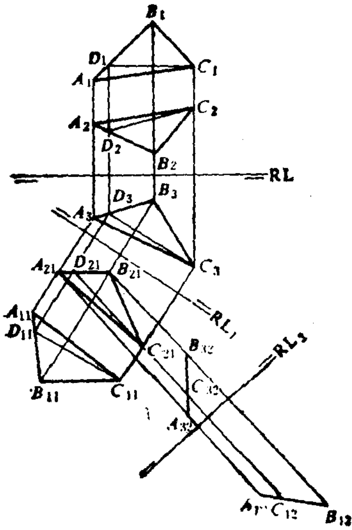


图6-12　平面的基本变换（三）

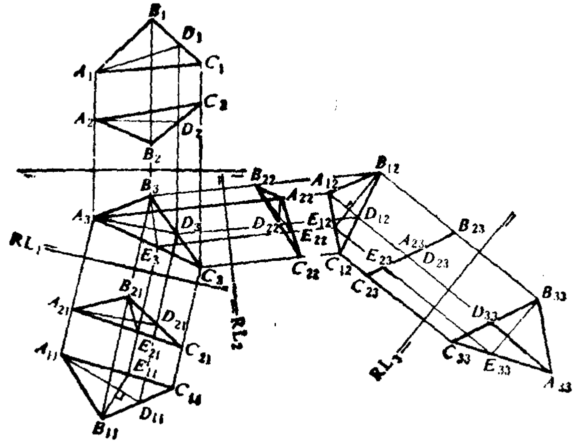


图6-13　平面的基本变换（四）

图 6-13 为平面由一般位置变换为既半平行又半垂直于一新投影面的具体作图步骤：

（1）在 ABC 上取辅助线 $AD\parallel\Sigma_2$，为了在 ABC 上方便地作出另一辅助线 $BE(\perp AD)$，

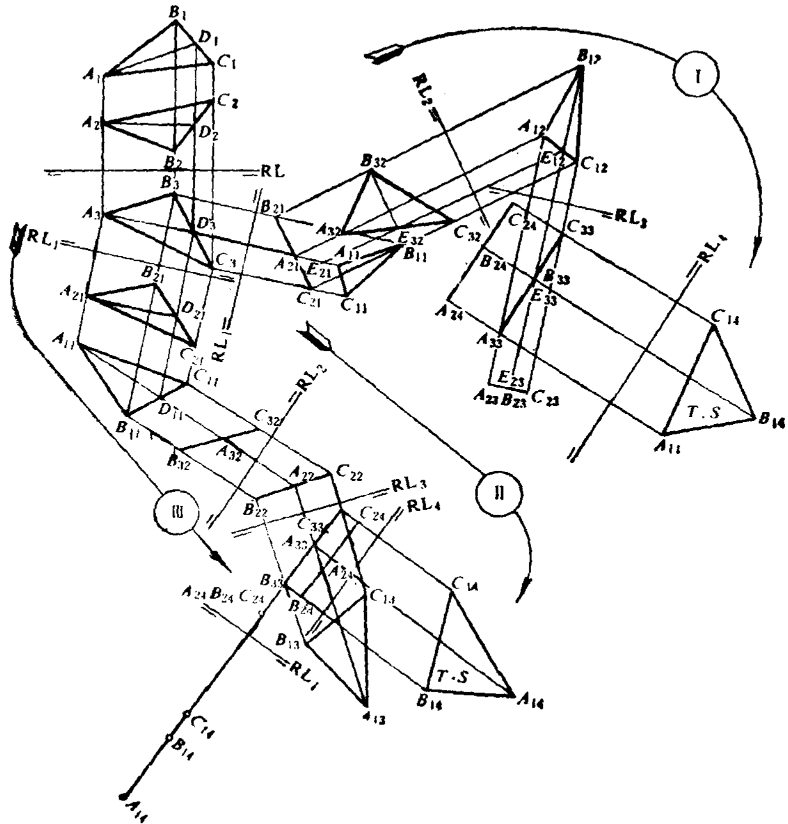


图6-14　平面的基本变换（五）

通过投影变换使$AD /\!/ \pi_{11}$。

（2）另作$RL_2 /\!/ B_3E_3$，使$BE /\!/ \Sigma_{32}$，而AD在该体系中平行于Σ_{22}。由于$AD \perp BE$，因此$A_{12}D_{12} \perp B_{12}E_{12}$。

（3）作$RL_3 /\!/ B_{12}E_{12}$，通过变换使AD在该体系中垂直于π_{23}，并使BE平行于π_{23}。因此，ABC既半平行于π_{23}，又半垂直于π_{23}。

五、一般位置平面变换成平行于一新投影面

一平面平行于一投影面，即平行于确定该投影面的两个投影空间。因为由一般位置平面变为平行于一投影空间，需变换两次，所以一般位置平面变为平行于一新投影面，需要变换四次。其具体变换过程是：一般位置→半垂直于一投影面→平行于一投影空间→既平行于一投影空间又垂直于另一投影空间→平行于一投影面。具体作图步骤见图 6-14“Ⅰ”所示：

第一次变换，先在ABC上取辅助线$AD /\!/ \Sigma_2$，并作$RL_1 \perp A_3D_3$，使ABC半垂直于π_{21}。

第二次变换，$RL_2 /\!/ A_{21}B_{21}C_{21}$，使$ABC /\!/ \Sigma_{22}$。

第三次变换，在ABC上另作辅助线$BE /\!/ \pi_{12}$，并使$RL_3 \perp B_{12}E_{12}$，使ABC既平行于Σ_{23}、又垂直于Σ_{13}。应指出，这一作图步骤，在平面变换中被广泛的应用。

第四次变换，$RL_4 /\!/ A_{33}B_{33}C_{33}$，使$ABC /\!/ \pi_{14}$。此时，$A_{14}B_{14}C_{14}$反映$ABC$的实形。

由一般位置平面变换成平行于一新投影面，还可按下述步骤进行：一般位置→半平行于一投影面→垂直于一投影空间→既垂直于一投影空间、又平行于另一投影空间→平行于一投影面。具体作图步骤见图 6-14“Ⅱ”所示：

第一次变换，$RL_1 /\!/ A_3D_3$，使$ABC /\cdot/ \pi_{11}$。

第二次变换，$RL_2 \perp A_{11}D_{11}$，使$ABC \perp \Sigma_{12}$。

第三次变换，$RL_3 /\!/ A_{22}B_{22}C_{22}$，使$ABC$既垂直于$\Sigma_{12}$、又平行于$\Sigma_{23}$。

第四次变换，$RL_4 /\!/ A_{33}B_{33}C_{33}$，使$ABC /\!/ \pi_{14}$。因此，$A_{14}B_{14}C_{14}$反映$ABC$的实形。

图 6-14“Ⅲ”为一般位置平面ABC，经过四次变换后，与一新投影面绝对垂直。其中前三次变换与“Ⅰ”中前三次变换相同；第四次变换时，使$RL_4 \perp A_{33}B_{33}C_{33}$。此时，$A_{24}B_{24}C_{24}$为一点，即$ABC \veebar \pi_{24}$。显然，如果前三次变换与“Ⅰ”部分中前三次变换相同，而第四次变换时，使$RL_4 \perp A_{33}B_{33}C_{33}$，也同样可使$ABC$与一新投影面绝对垂直。

图 6-15 为一般位置平面变换为平行于一新投影面或与一新投影面绝对垂直时的简化作图步骤。

在图 6-15“Ⅰ”中：$RL_3 /\!/ A_3D_3$；$RL_4 \perp A_4D_4$；$RL_5 /\!/ A_5B_5C_5$；$RL_6 /\!/ A_6B_6C_6$，最后得$A_7B_7C_7$反映ABC的真形。

在图 6-15“Ⅱ”中：前三次变换与“Ⅰ”

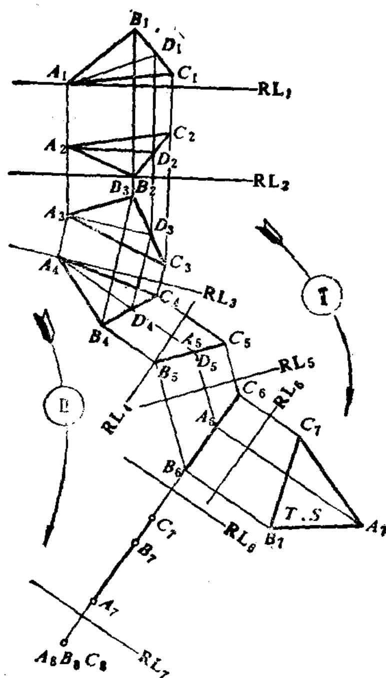


图6-15　平面基本变换的简化作图

中前三次变换相同。在第四次变换中，$RL_6 \perp A_6B_6C_6$。在第五次变换中，$RL_7 \perp A_7B_7C_7$，最后得 $A_8B_8C_8$ 为一点。

第四节　超平面的投影变换

一、一般位置超平面变换成垂直于一新投影空间

若将已知超平面上一直线变换成垂直于一新投影空间，则该超平面即垂直于此投影空间。因此，超平面由一般位置变为垂直于一投影空间所需变换的次数，决定于在已知超平面上所取辅助线的位置。显然，当超平面用迹线表示时，只需变换一次，即可使超平面由一般位置变换成垂直于一投影空间。

在图 6-16 中，已知一般位置超平面T，设 $T \perp \Sigma_{11}$，即使$(\Sigma_1、\Sigma_2、\Sigma_3) \to (\Sigma_{11}、\Sigma_2、\Sigma_3)$。由于 Σ_2、Σ_3不变，即 π_1 不变，所以 τ_1 不变，取 $RL_1 \perp \tau_1$。为了求出 τ_{21}、τ_{31}，分别在 τ_2、τ_3 上取点 A、B，通过变换使所得的新投影 A_{31}、B_{21} 在 RL_1 上，而 τ_{21}、τ_{31} 应分别通过 A_{21}、B_{31}。此时，$T \perp \Sigma_{11}$。

二、垂直于一投影空间的超平面变换成垂直于一新投影面

一超平面垂直于一投影面，即垂直于确定该投影面的两个投影空间。因此，只要使垂直于一投影空间的已知超平面通过一次变换，使它再垂直于另一投影空间即可。

在图 6-17 中，已知超平面 $T \perp \Sigma_1$，设 $RL_1 \perp \tau_2$（即使T又垂直于 Σ_{21}），分别在 τ_1、τ_3 上取点 A、B，变换后，A_{31}、B_{11} 在 RL_1 上；A_{11} 在 τ_2 上，因此 τ_{11} 和 τ_2 重合；而 τ_{31} 应通过 B_{31}。此时，超平面垂直于 π_{31}。

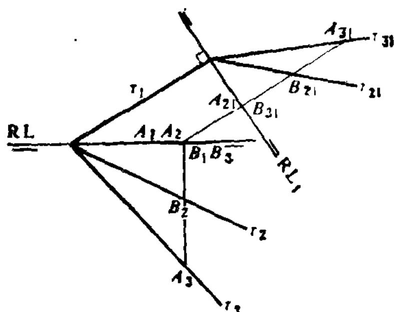


图6-16　超平面的基本变换（一）

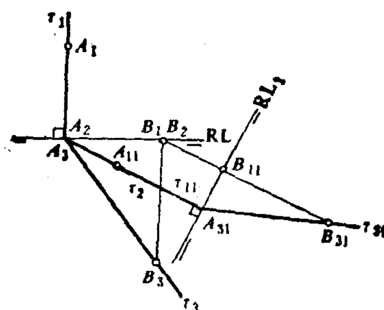


图6-17　超平面的基本变换（二）

三、一般位置超平面变换成垂直于一新投影面

在图 6-18 中，超平面 $ABCD$ 为一般位置，设该超平面由两交错直线 AC、BD 所确定。如果通过投影变换，使其中一直线垂直于一投影空间，另一直线垂直于另一投影空间，则超平面 $ABCD$ 垂直于上述两投影空间所确定的投影面。图 6-18 a 为说明上述分析的示意图，如果$AC \perp \Sigma_3$，而 $BD \perp \Sigma_1$，则该超平面垂直于 Σ_1、Σ_3 所确定的投影面 π_2。

图 6-18 b 是用简化方法使超平面 $ABCD$ 由一般位置变换成垂直于一新投影面的具体作图步骤：

（1）作 $RL_3 /\!/ B_3D_3$，由 $A_1B_1C_1D_1$ 作出 $A_4B_4C_4D_4$。

（2）作 $RL_4 /\!/ B_4D_4$，由 $A_2B_2C_2D_2$ 作出 $A_5B_5C_5D_5$。

（3）作 $RL_5 \perp B_5D_5$，得 B_6D_6 为点，即直线 BD 由一般位置变换成垂直于一投影空间。

（4）作 $RL_6 /\!/ A_6C_6$，由 $A_4B_4C_4D_4$ 作出 $A_7B_7C_7D_7$。此时，B_7D_7 为一点。

（5）作 $RL_7 /\!/ A_7C_7$，即 AC 变换成平行于一投影面。此时，A_8C_8、B_8D_8 均反映其实长。

（6）作 $RL_8 \perp A_8C_8$，由 $A_8B_8C_8D_8$ 作出 $A_9B_9C_9D_9$。此时，直线 AC 由一般位置变换成垂直于一新投影空间。但在上述变换中，BD 却变换成不垂直于投影空间。

（7）$RL_9 \perp B_9D_9$，即使 BD 再垂直于一新投影空间，此时，$A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ 为一直线，即超平面 $ABCD$ 由一般位置变换成垂直于一新投影面。

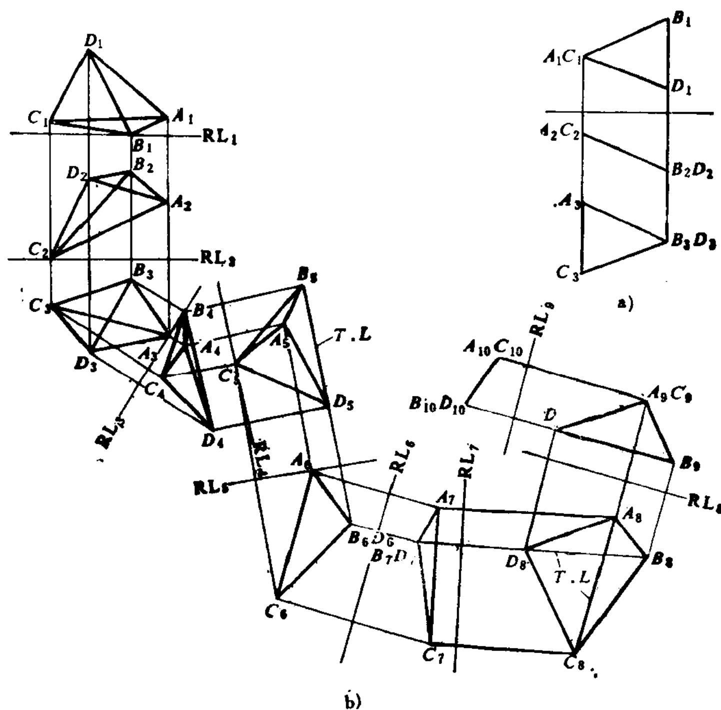


图6-18 超平面的基本变换（三）

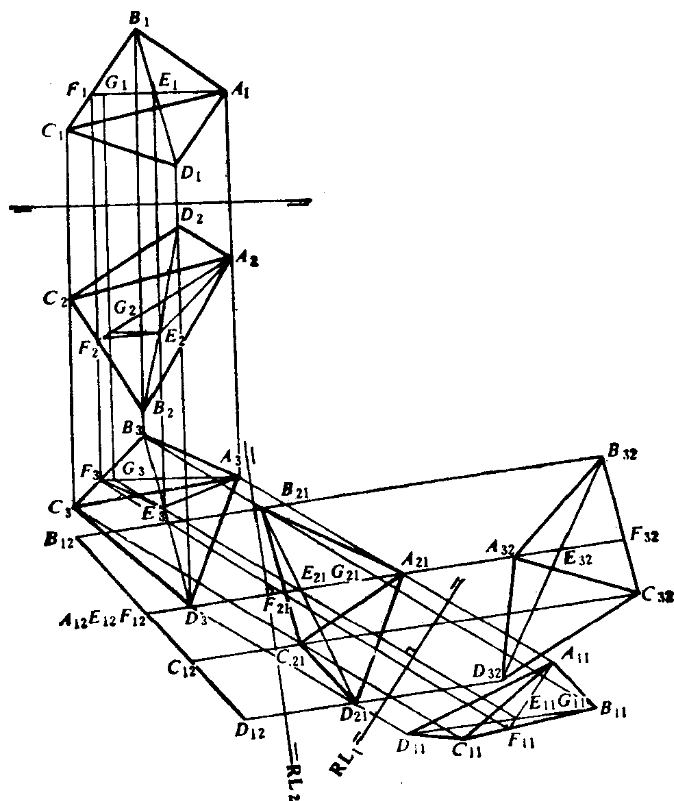


图6-19 超平面的基本变换（四）

另一种解题方法是运用两平面绝对垂直的概念。我们知道，若两平面绝对垂直，则包含其中一个平面的任一超平面必定垂直于另一平面。为此，若将已知超平面上的一个平面变换成绝对垂直于一新投影面，则上述超平面也垂直于该投影面。

图 6-19 是将超平面 $ABCD$ 由一般位置变换成垂直于一新投影面的具体作图步骤：

（1）为了减少变换次数，在 $ABCD$ 内取一特殊位置平面 $AEF /\!/ \Sigma_1$。

（2）在 AEF 上，另取辅助线 $EG /\!/ \pi_3$。在第一次变换时，使 $RL_1 \perp E_3G_3$，通过变换，使 AEF 在体系（Σ_1、Σ_2、Σ_{31}）中，既平行于 Σ_1 又垂直于 Σ_{31}。此时，超平面上其他各点也进行相同的变换。

（3）设 $RL_2 \perp A_{21}E_{21}F_{21}$，进行第二次变换，使 AEF 在体系（Σ_1、Σ_{22}、Σ_{31}）中绝对垂直于 π_{12}。此时，超平面 $ABCD$ 也垂直于 π_{12}，即 $A_{12}B_{12}C_{12}D_{12}$ 为一直线。

从上述解题过程中可以明显地看出，运用两平面绝对垂直的概念，使解题过程大为简化。

第五节　变换投影空间在度量问题中的应用

在多维空间中，两个几何元素间的相互位置是用距离和角度来度量的。为了在投影图上直接反映出所求的距离或角度，通常可以运用变换投影空间的方法，以改变几何元素与投影空间（或投影面）的相对位置，达到便于解题的目的。

一、距离问题

（一）基本概念

在四维空间中，几何元素之间的距离问题有以下几种情况：

（1）全平行时两几何元素之间的距离问题，仅存在于直线与超平面、平面与超平面及超平面与超平面之间。由于它们之间公垂线的方向是唯一的，因此求出它们之间公垂线的距离，即可求得它们之间的距离。显然，这类问题的作图基础，是求点到超平面的距离。

（2）无公共固有点和非固有点时两几何元素之间的距离问题，仅存在于两不共平面的直线及不共超平面的直线与平面之间。通俗地说，它们之间既不平行、又不相交。这类问题的作图基础，是求点到平面之间的距离。

（3）部分平行时两几何元素间的距离问题，仅存在于不共超平面的两半平行平面之间。

（二）基本作图

1. 点与超平面间的距离

确定点与超平面的距离时，其解题方法是：过已知点作直线垂直于已

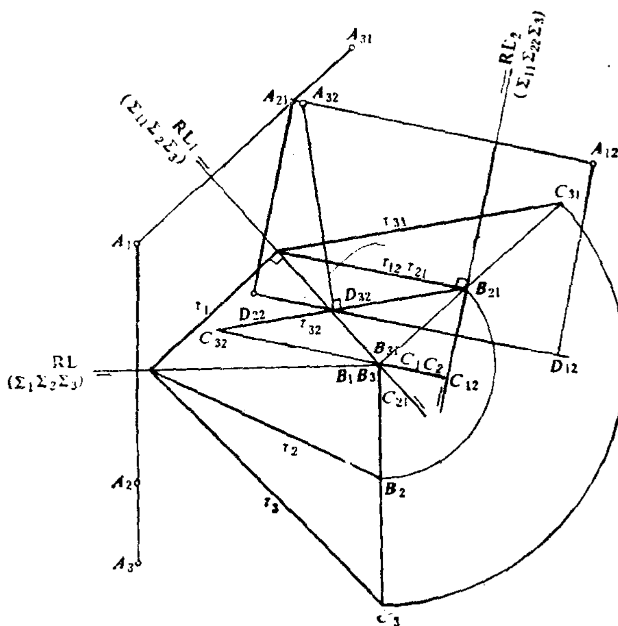


图6-20　求点到超平面之间的距离

知超平面，并求出垂足，已知点与垂足之间的距离即为所求点到超平面之间的距离。为了简化作图，可以将已知超平面变换成垂直于一新投影面，则点到超平面的垂线必定平行于该投影面，因此，其垂线在该投影面上的投影反映所求点到超平面的真实距离。

图 6-20 为求点 A 与超平面 T 之间距离的具体作图步骤：

（1）第一次变换，$RL_1 \perp \tau_1$，即使 $T \perp \Sigma_{11}$。在 τ_2 上取点 B，在 τ_3 上取点 C。变换后，求出 B_{21}、C_{31}、B_{31}、C_{21}，过 B_{21}、C_{31} 分别作出 τ_{21}、τ_{31}，而 B_{31}、C_{21} 在 RL_1 上（图中，即在 RL 与RL_1 的交点上）。同时，还可求得 A_{21}、A_{31}。

（2）第二次变换，$RL_2 \perp \tau_2$，使 T 又垂直于 Σ_{22}，即使 T 垂直于 Σ_{11}、Σ_{22} 所确定的投影面 π_{32}。图中，C_{32} 到 RL_2 的距离等于 C_{31} 到 RL_1 的距离，过 C_{32} 作出 τ_{32}，而 τ_{12} 和 τ_{21} 重合。同时，可作出 A_{12}、A_{32}。

（3）由 A_{12}、A_{21} A_{32} 分别向 τ_{12}、τ_{21}、τ_{31} 作垂线，D_{12}、D_{21}、D_{32} 为其垂足的投影，$A_{32}D_{32}$ 的长度即是 A 到 T 的距离。

显然，求直线与超平面、平面与超平面、超平面与超平面之间的距离，都可以转化成（或借助于）求点与超平面之间的距离。

2. 点与平面之间的距离

在四维空间中，求点 A 到平面 α 间的距离有多种解题途径，如：

（1）由点 A 与平面 α 确定一个超平面，通过变换使该超平面平行于某一投影空间，然后用三维画法几何方法求解。

（2）过点 A 作一平面与 α 绝对垂直，并求出该平面与 α 的垂足，A 与垂足的距离即为所求。

（3）通过投影变换，使 α 与某一投影面绝对垂直，则 α 在该投影面上的投影为点，它与 A 在该投影面上投影之间的距离即为所求。

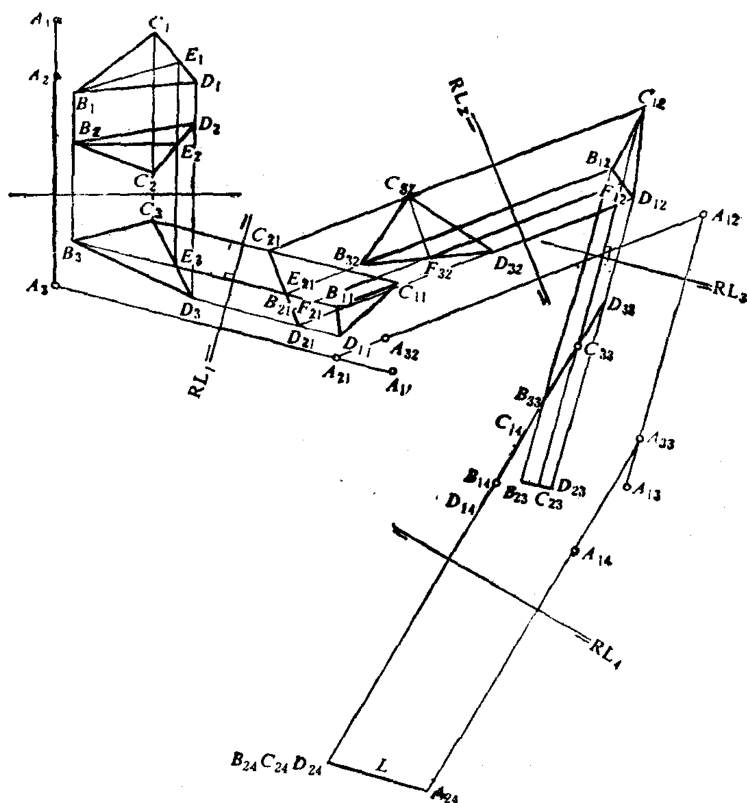


图6-21 确定点与平面之间的距离

图 6-21 为采用上述第三种解题途径，求点 A 与平面BCD 之间距离 L 的作图步骤。通过四次变换，使 BCD 与 π_{24} 绝对垂直，即 $B_{24}C_{24}D_{24}$ 为一点。A_{24} 与 $B_{24}C_{24}D_{24}$ 之间的距离 L 反映 A 与 BCD 的距离。

运用上述基本作图方法，可以求解四维空间中不共面两直线间的距离。此时，过一已知

直线作一辅助面平行于另一已知直线，求出该直线上任意一点到所作辅助面的距离，即为不共面两直线间的距离。

3．不共超平面的直线与平面的距离

不共超平面的直线与平面既不相交又不平行，它们之间公垂线的距离即为直线与平面之间的距离。

设已知直线 MN 和平面 α (ABC)，现介绍两种解题方法。

第一（图 6-22 a）：过 MN 作一超平面垂直于平面 α。为此，过 MN 上任意一点，如 M，作一平面 β 与 α 绝对垂直，由 MN 和 β 所确定的超平面必定垂直于 α，并求出它们的交线 $M'N'$。此时，MN 和 $M'N'$ 共存于上述超平面内，但它们是交错的。因此，求直线 MN 与平面 α 间的距离问题，可转化为求两交错直线 MN 与 $M'N'$ 之间的距离 DD'。

第二（图 6-22 b）：过直线 MN 上任意一点，如 M，作 MD、ME 分别平行于 AB、AC，则由 MN、MD、ME 所确定的超平面必定与 ABC 平行。它们之间的距离即为 MN 与 α (ABC) 之间的距离。

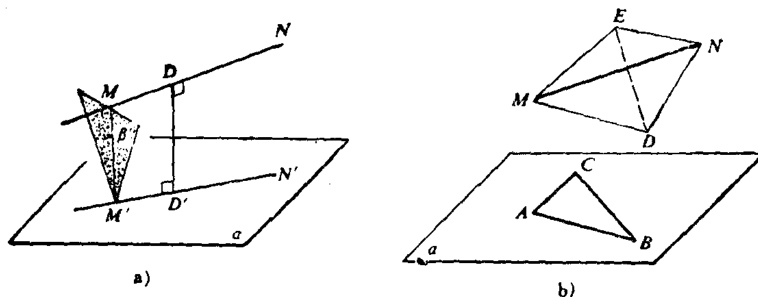


图6-22　求直线与平面的距离

显然，根据上述两种作图方法，再运用投影变换法，就可以简化作图过程。

4．半平行时两平面间的距离

确定半平行时两平面间的距离与三维空间中确定两平行平面之间的距离，有着明显的区别。在半平行的两平面内，只能找出一组互相平行的直线，即在一个平面内只有一个方向的一系列平行线与另一平面上一系列平行线平行。设两半平行平面为 α、β，如图 6-23 a 所

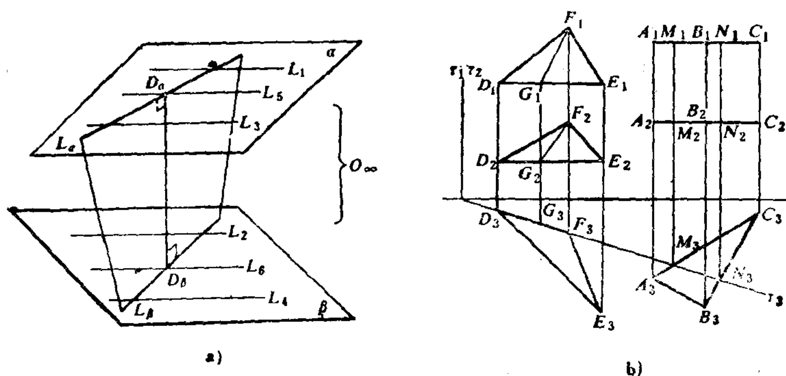


图6-23　确定两半平行平面之间距离（一）

示，在α、β上只有一个方向的一系列平行线，如L_1、L_2、L_3、L_4………等，它们共有一个非固有点O_∞。每对平行线间的距离均不相同，其中有一对平行线的距离为最小，它确定了两半平行平面之间的距离。为此，在平面α上任取一条与L_1、L_2……不平行的直线L_α，过该直线可以作出唯一的辅助超平面（图中未表示出）垂直于β，并与β交于L_β。L_α、L_β共存于辅助超平面内，但它们是交错的。如果求出L_α、L_β之间的公垂线$D_\alpha D_\beta$，即确定了两半平行平面之间的距离。如果过D_α、D_β分别作两平行线L_5、L_6，则它们即为α、β上距离为最短的一对平行线。为了便于说明，可通过投影变换将上述作图过程进行简化，现说明如下：

（1）已知平面ABC半平行于平面DEF，通过投影变换使$ABC \parallel \pi_2$、$DE \parallel \pi_3$。

（2）在DEF上任取一直线，如DF，并过该直线作一超平面T$\perp ABC$。此时，T必定垂直于π_3。

（3）求出T与ABC的交线MN，DF与MN是共存于T内的两交错直线。

（4）过点D作直线$DG \parallel MN$，即$DFG \parallel MN$。

（5）通过投影变换，使DFG绝对垂直于一新投影面，使DFG和MN在该投影面上的投影都为点（图中未作出），它们之间的距离即是DFG与MN间的距离，也就是所求平面ABC与平面DEF之间的距离。另外，由于DFG与MN共存于超平面T内，因此也可按三维画法几何问题求解。

确定两半平行平面间的距离，也可按图6-24所示进行作图。

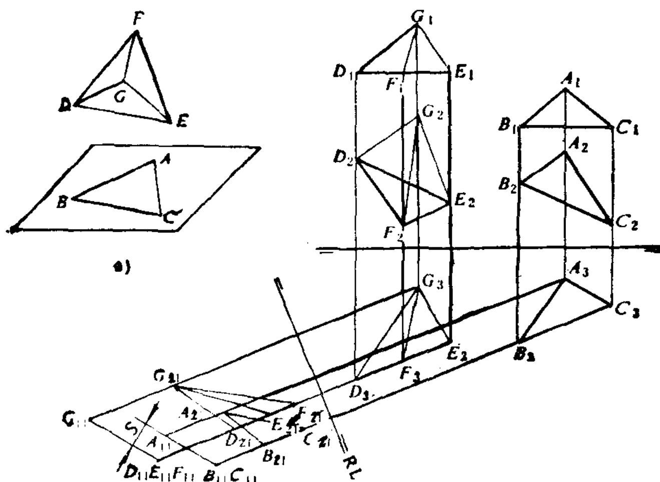


图6-24　确定两半平行平面之间的距离（二）

在图6-24 a中，平面ABC半平行于DEF，其中$DE \parallel BC$。过D作一直线DG与ABC内任一直线平行，如$DG \parallel AB$，则包含DEF的超平面$DEFG \parallel ABC$。此时，$DEFG$与ABC之间的距离，即为所求ABC与DEF之间的距离。图6-24 b为具体作图步骤：已知$DE \parallel BC$，并作$DG \parallel AB$，即使$DEFG \parallel ABC$。为了方便地求出它们之间的距离，可通过投影变换，使$DEFG$垂直于一新投影面（作图步骤可参见图6-19），在该投影面上的投影$D_{11}E_{11}F_{11}G_{11}$平行于$A_{11}B_{11}C_{11}$，它们之间的距离S即为所求ABC与DEF之间的距离。

二、角度问题

在n维空间中，两子空间之间的夹角与三维空间中的情况不同，它们之间可以有一个以上的夹角。

（一）基本概念

在n维空间中，两子空间的维数分别为p、q，以D^p、D^q表示，并设$p \leq q$。根据多维几何学可知，D^p与D^q之间的夹角，有以下几种情况：

（1）若两子空间D^p与D^q不相交，则它们之间有p个夹角。

（2）若两子空间 D^p 与 D^q 相交于一点，则它们之间有 p 个夹角。

（3）若两子空间 D^p 与 D^q 相交于 r 维空间（$r \leqslant p \leqslant q$），则它们之间有（$p-r$）个夹角。

根据上述结论，在四维空间中，不共面的两直线之间，不共超平面的直线与平面之间，直线与超平面之间，平面与超平面之间，超平面与超平面之间，都只有一个夹角；不共超平面的两平面之间，有两个夹角。为了弄清这个问题，先回顾一下三维空间中两平面的夹角。图 6-25 a 中，已知平面 α、β 相交于 AB。如果根据平面 β 来确定另一平面 α，除了需要知道它们的交线 AB 外，还需要已知 α 面上的一点，即只需一个夹角 θ 就可确定 α。此时，平面 CDE 是 α、β 的公垂面，CD 是 α 上过交点 D 的任意直线中与 β 夹角为最小值的直线。以上概念对于分析四维空间中不共超平面的两平面之间的夹角，同样也是需要的。设四维空间中两平面 α、β 相交于 O，如图 6-25 b 所示。已知平面 α，若要确定另一平面 β，除了需要知道它们的交点外，还需要有两个点，（相当于两个角）。设平面 γ_1、γ_2 是 α、β 之间的两个公垂面，而 γ_1、γ_2 与 α、β 的交线 OA_1、OB_1，OA_2、OB_2 之间的夹角 θ_1、θ_2 即是 α、β 之间的夹角。可以证明，$\gamma_1 \veebar \gamma_2$。

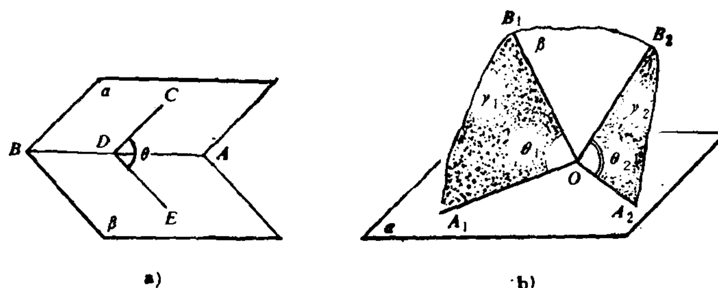


图6-25　分析两平面间夹角的示意图

（二）基本作图

1. 不共面两直线之间的夹角

设四维空间中直线 AB、CD 不共面，如图 6-26 所示。过其中一直线 CD 上任一点 C，作 $CE /\!/ AB$，则 CE 与 AB 所夹的锐角 θ 即为不共面两直线之间的夹角。此时，运用投影变换求出 CDE 的实形，即可求解。具体作图步骤不再赘述。

2. 不共超平面的直线与平面之间的夹角

设直线 EF 与平面 ABC 不共超平面，如图 6-27 所示。过平面 ABC 上任一点，如过 C，作直线 $CD /\!/ EF$，CD 与 ABC 之间的夹角 θ 即为所求。

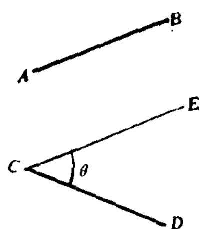


图6-26　确定两直线间夹角的示意图

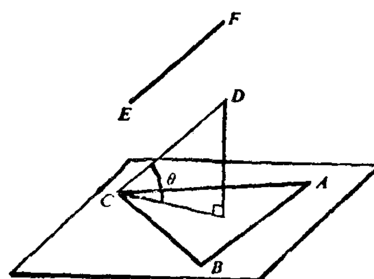


图6-27　确定直线与平面间夹角的示意图

图 6-28 为确定不共超平面的直线 EF 与平面 ABC 之间夹角的作图步骤：

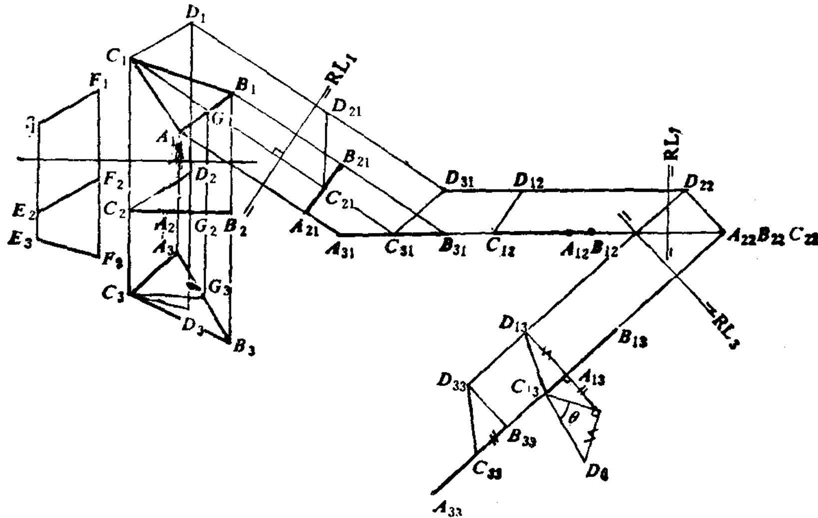


图6-28　确定直线与平面间夹角

（1）过 ABC 上的点 C 作 $CD \parallel EF$。

（2）经过三次投影变换，使 ABC 与 CD 决定的超平面 $ABCD \parallel \Sigma_{23}$，其中 $ABC \veebar \pi_{22}$。因此，CD 与 ABC 间的夹角在 Σ_{23} 中的超投影可反映其真实大小。

（3）用三维画法几何方法求出 $(CD)_{23}$ 与 $(ABC)_{23}$ 之间的夹角 θ，即为所求。

3. 直线与超平面之间的夹角

设直线 AB 与超平面T 交于点 A，如图 6-29 所示。过 B 作直线 BD 垂直于T，垂足为 D，AB 与 AD 的夹角 α，即为 AB 与T 的夹角。如果求出 AB 与 BD 的夹角 β，则所求夹角 $\alpha = 90 - \beta$。实际上，求直线与超平面之间的夹角问题，可转化为求共面两直线间的夹角。具体作图步骤不再赘述。

4. 平面与超平面之间的夹角

设平面 ABC 与超平面T相交于 AB，如图 6-30 所示。若要确定它们的夹角，可有多种解题途径，例如：

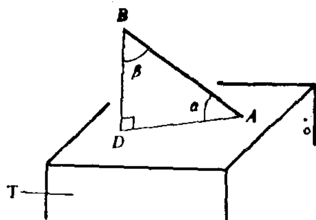


图6-29　确定直线与超平面之间夹角的示意图

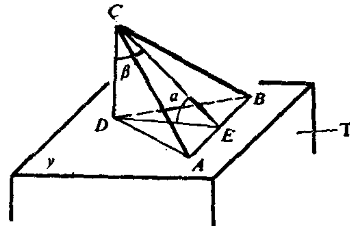


图6-30　确定平面与超平面之间夹角的示意图

（1）过 C 作 $CD \perp$ T，垂足为 D，ABC 与 ABD 之间的夹角 α 即为所求。如果求出 CD 与 ABC 之间的夹角 β，则所求夹角 $\alpha = 90^\circ - \beta$。

（2）过 C 作一辅助超平面 $\Omega \perp AB$（图中未作出），如果 Ω 与 ABC 相交于直线 CE，又与T相交于平面 γ，则 CE 与 γ 的夹角即为 ABC 与T的夹角。

显然，上述解题方法中，可以应用投影变换简化作图过程。

5. 两超平面间的夹角

设两超平面T、Λ 相交于平面 α。若要确定它们之间的夹角 θ，可有多种解题途径，例

如：

（1）作辅助超平面Ω、同时垂直于T、Λ，如图6-31 a所示，Ω与T、Λ分别交于平面β、γ，而β与γ相交于AB，且β⊥α、γ⊥α。此时，β与γ所构成的两面角θ，就是所求两超平面之间的夹角。

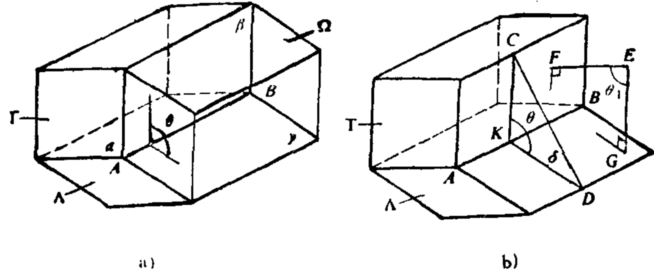


图6-31 确定两超平面之间夹角的示意图

（2）过交平面α上任意一点K，作平面δ⊻α，如图6-31 b所示。此时，δ与T相交于KC、而与Λ相交于KD。显然，KC与KD的夹角θ，即为两超平面之间的夹角。

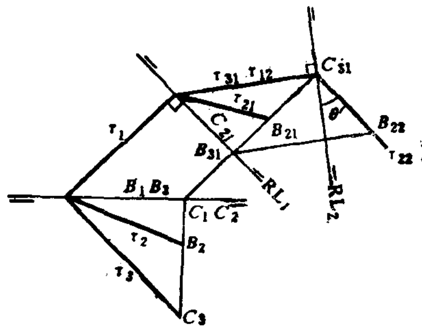


图6-32 确定超平面与投影空间之间的夹角

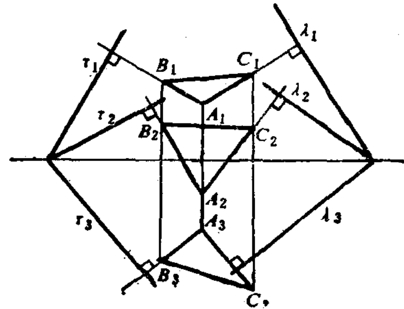


图6-33 确定两超平面之间的夹角

（3）在T、Λ外任取一点E，如图6-31 b所示，过E作直线EF、EG分别垂直于T、Λ，设EF与EG的夹角为θ_1，则所求两超平面T、Λ的夹角$\theta = 180^\circ - \theta_1$。

以下举例说明上述解法（2）、（3）的具体作图步骤：

例1 求超平面T与Σ_2的夹角θ。

解：

T与Σ_2的交平面由迹面$\tau_1\tau_3$所确定。如果使$\tau_1\tau_3$与一新投影面绝对垂直，则根据解法（2）可知，T、Σ_2与该投影面的交线之间的夹角，即为所求。具体作图步骤如图6-32所示。第一次投影变换，使$\tau_1 \perp \Sigma_{11}$；第二次变换，使$\tau_{31} \perp \Sigma_{32}$。经两次投影变换后，原迹面$\tau_1\tau_3$在新体系$\Sigma_{11}$、$\Sigma_2$、$\Sigma_{32}$中由$\tau_{12}\tau_{31}$表示。$\tau_{12}\tau_{31}$绝对垂直于$\Sigma_{11}$、$\Sigma_{32}$所确定的投影面$\pi_{22}$。此时，T与$\pi_{22}$的交线为$\tau_{22}$，$\Sigma_2$与$\pi_{22}$的交线为$RL_2$。因此，$\tau_{22}$与$RL_2$的夹角θ即为所求。

例2 确定超平面T、Λ的夹角θ（图6-33）。

解：

（1）在T及Λ之外的适当位置，取一点A。过A分别作直线AB⊥T、AC⊥Λ。

（2）通过四次投影变换（参阅图6-14）；求出∠CAB的夹角θ_1的真实大小。

（3）作出θ_1的补角θ，即为所求。

6. 不共超平面的两平面之间的夹角

确定不共超平面的两平面之间夹角的解析法，早为人们所知道，但用图解法来解决这个问题，还是近几年才开始进行深入研究，并取得了一定成果[23]。应指出，要寻求正确而较简便的图解法，仍然是一个需进一步研究的课题。

第七章　几何元素的旋转

解决多维空间中几何元素间的某些定位问题和度量问题，除了采用变换投影空间的方法外，还可以采用旋转几何元素的方法，以改变几何元素与投影空间（或投影面）的相对位置，达到简化解题的目的。

在目前所见到的文献中，有关多维空间中几何元素旋转的理论和作图方法，还缺乏全面而深入的研究，因此，有些问题尚需进一步探讨。

在三维空间中，当点绕一直线（或称"一维轴"）旋转时，点的运动轨迹是圆。可是，在四维空间中，点绕直线旋转时，点的运动轨迹不是圆，而是一个二维球面。该球面所在的三维空间垂直于旋转轴，该空间与旋转轴的交点即是点绕直线旋转时的旋转中心，也是上述球面的球心。

在四维空间中，当点绕一平面（或称"二维轴"）旋转时，点的运动轨迹是圆。该圆所在的平面与"二维轴"绝对垂直，它们的交点即是点绕平面旋转时的旋转中心。

如果把上述概念推广到 n 维空间，则可得到如下的结论：在 n 维空间中，当一点绕（$n-2$）维子空间旋转时，该点的运动轨迹是圆。

本章主要讨论四维空间中几何元素的旋转问题。

第一节　几何元素绕直线旋转

一、点的旋转

如图 7-1 所示，设点 A 绕平行于 π_3 的轴线 MN 旋转，其运动轨迹是一球面。该球面所在的空间 T 经过点 A，并垂直于 MN。由于 $MN /\!/ \pi_3$，所以 $T \perp \pi_3$。T 与 MN 的交点 O 为其旋转中心，也是上述球面的球心，其旋转半径为 OA。由于该球面所在的空间 T 垂直于 π_3（即垂直于 Σ_1、Σ_2）、倾斜于 Σ_3，因此它在 Σ_3 中的投影为椭球面（图中省略，关于球的投影参见第八章），其具体作图步骤如下：

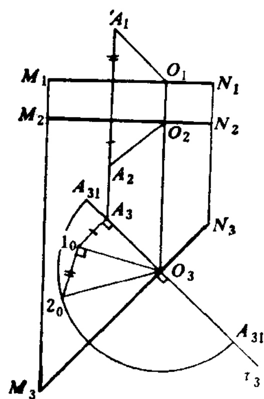


图7-1　点绕平行于投影面的直线旋转

（1）过 A 作 T 垂直于 MN，即过 A_3 作 $\tau_3 \perp M_3N_3$，而 τ_1、$\tau_2 \perp RL$（图中省略）。

（2）τ_3 与 M_3N_3 的交点 O_3 即为 T 与 MN 的交点 O 在 π_3 上的投影。由 O_3 可求出 O_1、O_2。

（3）连接 A、O，即得旋转半径。

（4）当 A 绕 MN 旋转时，由于 A 位于 T 内，所以 A_3 的运动轨迹与 τ_3 重合，而 A_1、A_2 的运动轨迹为椭球面的投影（图中省略）。当旋转半径 AO 绕 MN 旋转到与 π_3 平行时，AO 在 π_3 上的投影反映实长。为此，需求出 AO 的实长（图中采用"直角三角形法"）。所得 $A_{31}O_3$ 即为 AO 旋转到与 π_3 平行时的投影。需要说明的是：在四维空间中，点 A 第一次旋转后的新位置以 $\widehat{A}_1$ 表示，它的新超投影为 $(A)_{11}$、$(A)_{21}$、$(A)_{31}$，其投影以 A_{11}、A_{21}、A_{31} 表示；多次旋转时，以此类推。

二、直线的旋转

图7-2中AB为一般位置的直线。为简化作图，可设旋转轴MN过B点，并平行于π_3。由于B在旋转轴上，所以在旋转时其位置不变。当AB绕MN旋转到平行于π_3时，它在π_3上的投影反映AB的实长。为此，可将点A的旋转半径AO旋转至平行于π_3，其具体作图步骤与图7-1相同。求得A_{31}后，与B_3相连接，则$A_{31}B_3$即为AB的实长。

三、平面的旋转

在三维空间中，一般位置平面可绕平面上一平行于投影面的直线旋转，以求得该平面的实形。但在四维空间中的一般位置平面上不能取出一条平行于投影面的直线，因此一般位置平面不能运用绕平行于投影面的旋转轴的方法来求得它的实形。在图7-3中，设平面ABC半平行于π_3，在该平面上可作出直线（如AD）平行于π_3。如设AD为旋转轴，当ABC绕其旋转时，A、D两点不动，要使$ABC /\!/ \pi_3$，可将B或C绕旋转轴旋转，并使其旋转半径平行于π_3。现按前述方法旋转点B，使旋转半径$BO /\!/ \pi_3$。求得B_{31}后，与A_3、D_3相连，所得$A_3B_{31}C_{31}$即为平面ABC的实形。

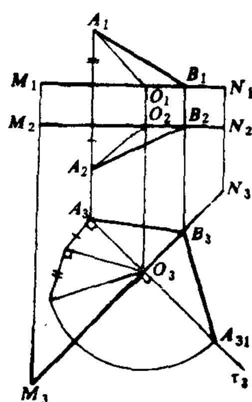


图7-2 直线的旋转

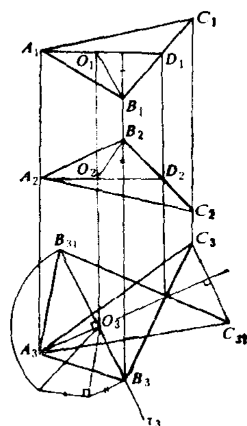


图7-3 平面的旋转

第二节 几何元素绕平面旋转

当几何元素绕平面旋转时，考虑到作图的简便，可选择绝对垂直于某一投影面的平面或以平行于某一投影空间的平面为“二维轴”，现分别介绍如下。

一、绕绝对垂直于投影面的平面旋转

1. 点的旋转

设点A绕绝对垂直于π_1的平面α旋转，其运动轨迹是圆，它所在的平面$\beta \veebar \alpha$。由于$\alpha \veebar \pi_1$，所以$\beta /\!/ \pi_1$。因此，当A绕α旋转时，A_1绕α_1作圆周运动，而A_2、A_3分别垂直于α_2、α_3作直线移动，如图7-4 a所示。图中，当点A绕α顺时针旋转角度为θ后的新位置为$\overset{\frown}{A_1}$（A_{11}、A_{21}、A_{31}）。

同理，图7-4 b表示点B绕α（$\veebar \pi_3$）逆时针旋转角度θ的具体作图方法。

2. 直线的旋转

直线绕平面旋转，实质上是直线上的两个点、绕同一平面，并按同一方向、旋转同一角

度的问题。为了简化作图，尽可能使“二维轴”通过直线上的一个点。

欲改变直线与投影空间（或投影面）的相对位置，直线旋转的次数和顺序与变换投影空间时的情况基本相同。现以直线 AB 由一般位置经旋 转 后垂直于 Σ_3 为例，可以看出，直线 AB 需分别绕三个不同的平面旋转三次。其顺序是（图 7-5 a）：

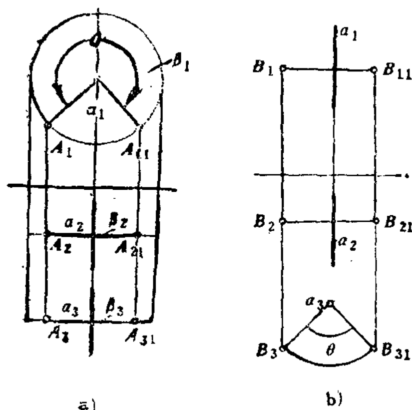


图7-4 点绕绝对垂直于投影面的平面旋转

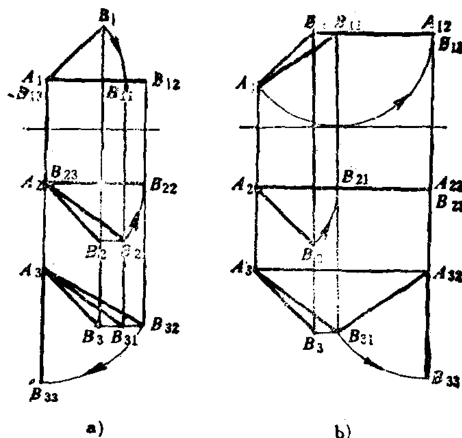


图7-5 由一般位置直线旋转成垂直Σ_3

（1）AB 绕平面 α，旋转到 $\widehat{AB_1}$（$/\!/\Sigma_1$），设 α 绝对垂直于 π_1，并 通 过 A。（为 了 简明起见，α 在图中省略，下同）。

（2）$\widehat{AB_1}$绕 β（$\veebar\pi_2$）旋转到$\widehat{AB_2}/\!/\pi_3$，即$\widehat{AB_2}$同时平行于Σ_1、Σ_2。

（3）$\widehat{AB_2}$绕 γ（$\veebar\pi_3$）旋转到$\widehat{AB_3}\perp\Sigma_3$。

图 7-5 b 为上述一般位置直线 AB 按另一种顺序旋转到垂直于 Σ_3 的具体作图步骤。

为了使图形比较清晰，对于图 7-5 中的情况，还可采用绕不指明的“二维轴”进行旋转，如图 7-6 所示。

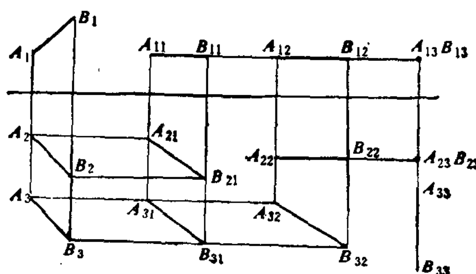


图7-6 直线绕不指明的“二维轴”旋转

3. 平面的旋转

现以一般位置的平面绕平面旋转后平行于 π_3 为例，如图 7-7 所示，ABC 为一般位置平面，按图 7-7 a 和图 7-7 b 所示两 种 顺序经过四次旋转，使ABC平行于π_3。显然，其作图过程与采用变换投影空间方法时的情况是相同的（参阅图 6-14）。

4. 超平面的旋转

图 7-8 为一般位置超平面 T 绕平面 α 顺时针旋转角度 θ 时的具体作图步骤。其中，设 $\alpha \veebar \pi_1$、并与基线交于 O；α 分别与 τ_2、τ_3 交于 A、B。当 T 旋转时，τ_1 绕O_1 旋转 θ，得 τ_{11}；A、B 两点在旋转时保持不动。利用 τ_{11} 与 RL 的交点 S，即可求得 τ_{21}、τ_{31}。

图 7-9 为将一般位置超平面 T 绕平面 α 旋转，使其垂直于 Σ_2 的具体作图步骤。为 了 使 $T\perp\Sigma_2$，应使 $\alpha\veebar\pi_2$。如果将辅助线 O_2D_2 旋转至与 RL 重合，则 $\tau_{21}\perp$RL，然后再作出 τ_{11}、τ_{31}。

图 7-10 为采用不指明的“二维轴”方法，将一般位置超平面 T 旋转，使其垂直于 π_1 的

具体作图步骤。图中，进行了两次旋转，第一次旋转，使T垂直于Σ_2；第二次旋转，使T又垂直于Σ_3，即T$\perp\pi_1$。

二、绕平行于投影空间的平面旋转

在四维空间中，几何元素绕平行于投影空间的平面旋转时，可以确定平面图形的实形。在解题时，可分两步进行：先将平面图形绕平行于某一投影空间的平面旋转，使其与该投影空间平行，然后再按三维画法几何方法，使平面绕平行于某一投影面的直线旋转、使其与该投影面平行。

1. 点的旋转

如图7-11所示，设点A绕平行于Σ_1的平面α旋转，该平面由两相交线LM、LN确定。为了使作图简便，取$LM\parallel\pi_2$、$LN\parallel\pi_3$。点A旋转时，轨迹为圆C，它所在的平面β既垂直于Σ_1又与α绝对垂直，而与Σ_2、Σ_3均为倾斜。由上述分析可知，圆C在Σ_1中的投影为直线，在Σ_2、Σ_3中的投影为椭圆（关于圆的投影

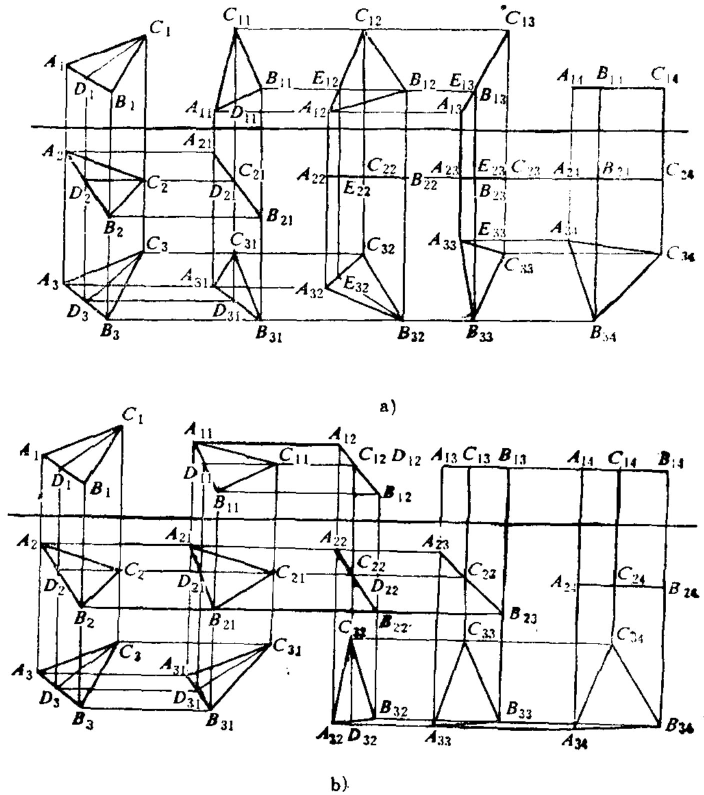


图7-7 一般位置平面绕平面旋转后平行于π_3

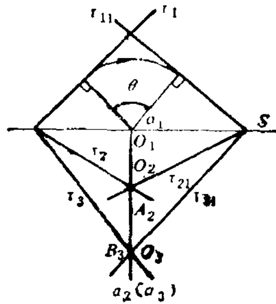


图7-8 超平面绕平面旋转

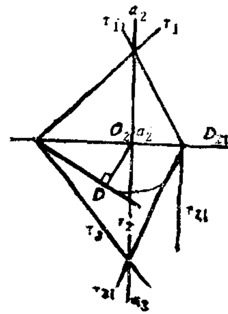


图7-9 一般位置超平面绕平面旋转后垂直于Σ_2

可参见第八章）。因此，C_2、C_3为直线，并分别垂直于L_2M_2、L_3N_3，而C_1为椭圆（图中省略）。A绕α旋转时的旋转中心O，即是β与α的交点，为了求出旋转中心O，可过β作辅助超平面T$\perp\pi_3$，并求出T与α的交线EF，而β与EF的交点即为旋转中心O。A旋转时，它的投影分别沿O_2A_2、O_3A_3作直线移动。旋转半径OA的实长用"直角三角形法"求得。当$OA\parallel\Sigma_1$时，A_2移至A_{21}，A_3移至A_{31}，它们的位置可用比例法确定（图中，$O_2b=OA$，$A_2C\parallel A_{21}b$）。

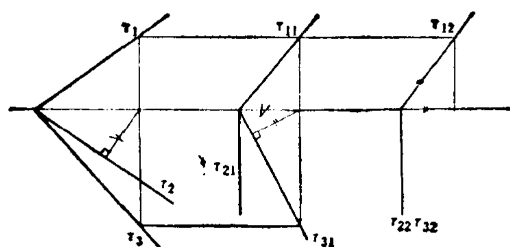


图7-10 超平面绕不指明的“二维轴”旋转

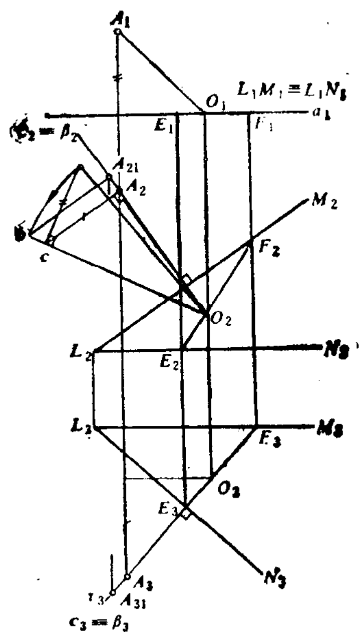
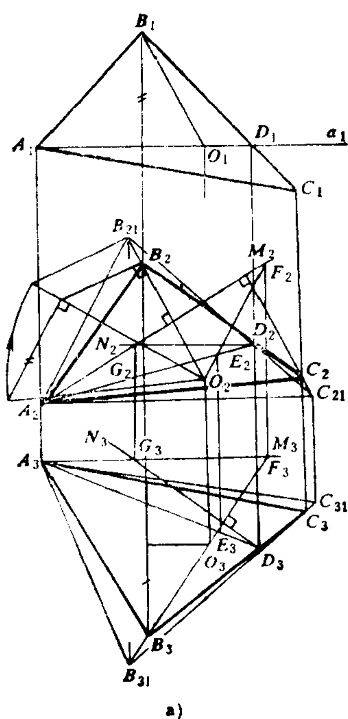
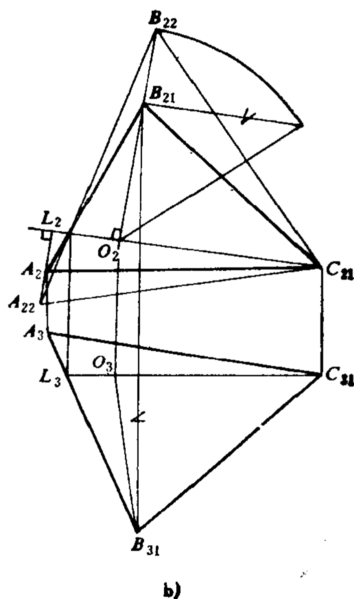


图7-11 点绕平行于投影空间的平面旋转



a)



b)

图7-12 求平面的实形

至此，图 7-11 已作出 OA 平行于 Σ_1，作图的第一步到此结束，第二步即可在 Σ_1 空间内进行，其具体作图方法将在下述平面的旋转中说明。

2. 平面的旋转

设已知平面 ABC 绕平行于 Σ_1 的平面 α 旋转，求其实形，具体作图步骤如下（图 7-12）：

（1）作平面 $\alpha \parallel \Sigma_1$。为使作图简便，设 α 通过点 A。

（2）求出平面 α 与 ABC 的交线 AD。

（3）在平面 α 上取两相交直线 AM、DN，并使 $AM \parallel \pi_2$，$DN \parallel \pi_3$，它们相交于 G。虽然 AM 和 DN 可以任意作出，但必须使 AM、DN、AD 位于同一平面 α 上。

（4）ABC 旋转时，AD 不动，B、C 将随之而改变位置。因此，可将平面 ABC 绕 α 旋转使其平行于 Σ_1 的问题视为点 B（或点 C）绕 α 旋转，并使 B 的旋转半径 $BO \parallel \Sigma_1$。为此，先求出旋转中心 O，再旋转 BO，使其平行于 Σ_1，其具体作图过程和方法与图 7-11 相同。当 $BO \parallel \Sigma_1$ 时，即 $ABC \parallel \Sigma_1$。因此，$A\widehat{B_1}\widehat{C_1}$ 在 Σ_1 中的超投影 $(ABC)_{11}$ 反映实形。到此，第一步作图过程结束。

（5）第二步作图过程是按三维画法几何方法，即将 $(ABC)_{11}$ 绕一平行线（如 $CL \parallel \pi_2$）旋转，此时可将 CL 视为三维画法几何中的正平线。并旋转 $(ABC)_{11}$，使其平行于 π_2，所得 $A_{22}B_{22}C_{21}$ 即为所求的实形，如图 7-12 b 所示。

第八章　曲线、曲面、超曲面

第一节　曲　　线

在四维空间中，任何曲线都是一维的。它们可以分为三类，即：曲线上各点位于同一平面内；曲线上各点位于同一超平面内；曲线上各点位于四维空间。

一、圆的投影

现以圆为例，分析平面曲线在不同位置时的图示特性及它们的有关性质。

1．平行于一投影空间

设圆 c 所在的平面平行于 Σ_1，则 $(c)_1$ 反映圆 c 的实形，其投影图如图 8-1 所示。其中，由于 $(c)_1$ 相对于 π_2、π_3 呈倾斜位置，所以 c_2、c_3 为椭圆，并可由 c_2、c_3 确定圆 c 的实形；而 c_1、c_2 或 c_1、c_3 不能反映圆 c 的实形。

2．平行于两个投影空间

设圆 c 所在平面平行于 Σ_1、Σ_2，即平行于 π_3，因此 c_3 反映圆 c 的实形，如图 8-2 所示。此时，c_4 为点，这说明四维空间中的圆可投影为点。

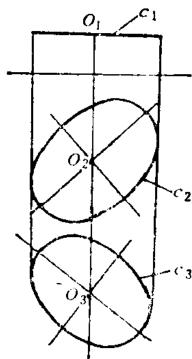


图8-1　圆的投影（平行于一投影空间）

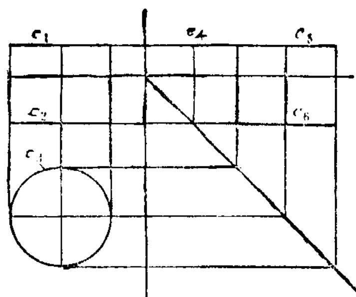


图8-2　圆的投影（平行于两投影空间）

3．垂直于一投影空间

设圆 c 所在的平面垂直于 Σ_3，则 $(c)_3$ 为直线，它的长度等于圆的直径，如图 8-3 所示。由于 c 所在的平面与 Σ_1、Σ_2 均倾斜，所以 $(c)_1$、$(c)_2$ 均为椭圆，而 c_3（椭圆）是 $(c)_1$、$(c)_2$ 在 π_3 上的投影。

4．平行于一投影空间又垂直于另一投影空间

设圆 c 所在的平面既平行于 Σ_1 又垂直于 Σ_3，所以 $(c)_1$ 反映其实形，而 $(c)_3$ 为直线，如图8-4 所示。由于圆 c 倾斜于 Σ_2，所以 $(c)_2$ 为椭圆。

5．半垂直于一投影面

设圆 c 所在的平面半垂直于 π_1（或半平行于 π_6）。图 8-5 中，圆 c 上有一直径 AB 垂直

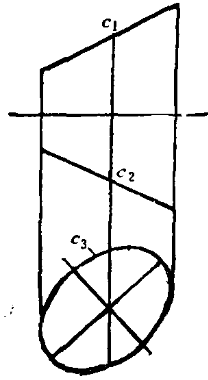


图8-3 圆的投影（垂直于一投影空间）

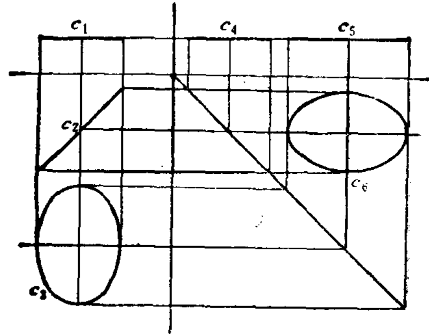


图8-4 圆的投影（平行于一投影空间又垂直于另一投影空间）

于 π_1（或平行于 π_6），即 c_1 为一直线。由于 c 均倾斜于 Σ_1、Σ_2、Σ_3，所以 $(c)_1$、$(c)_2$、$(c)_3$ 均为椭圆。如果在圆 c 上取弦 $EF \parallel AB$，则 EF 必定垂直于 π_1 或平行于 π_6。

6. 半垂直半平行于一投影面（图 8-6）

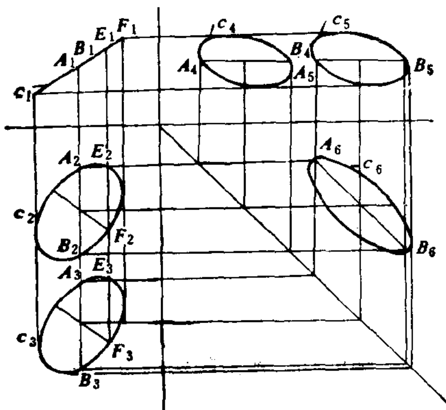


图8-5 圆的投影（半垂直于一投影面）

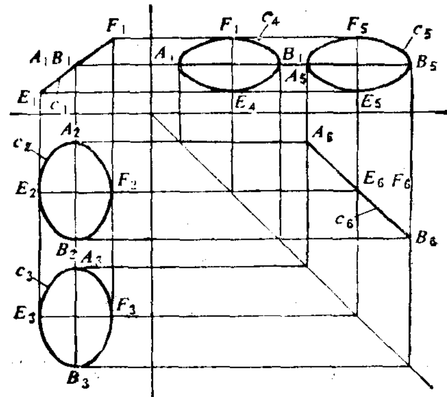


图8-6 圆的投影（半垂直又半平行于一投影面）

设圆 c 所在的平面既半垂直又半平行于 π_1（或既半平行又半垂直于 π_6）。此时，圆 c 上有一直径 AB 垂直于 π_1（或平行于 π_6），另有一直径 EF 平行于 π_1（或垂直于 π_6），因此 c_1、c_6 为直线。由于圆 c 所在的平面均倾斜于 Σ_1、Σ_2、Σ_3，所以 $(c)_1$、$(c)_2$、$(c)_3$ 均为椭圆。

7. 一般位置

设圆 c 所在的平面与各投影空间（各投影面）均呈倾斜，则 c_1、c_2、c_3 均为椭圆，如图 8-7 所示。

欲使圆由一种位置变换成另一种位置，其变换的步骤与方法与前述平面图形的投影变换相同。图 8-8 是由垂直于一投影空间的圆，经过两次变换后，平行于一新投影面的具体作图步骤。图中，c_{22} 为圆 c 的实形。

二、属于同一超平面的曲线

设曲线 m 属于超平面 $ABCD$，如图 8-9 所示。在曲线 m 上的每一点都可作为该超平面的

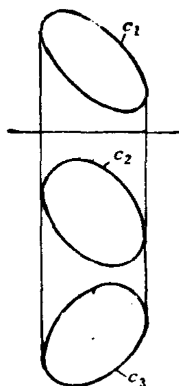


图8-7 圆的投影（一般位置）

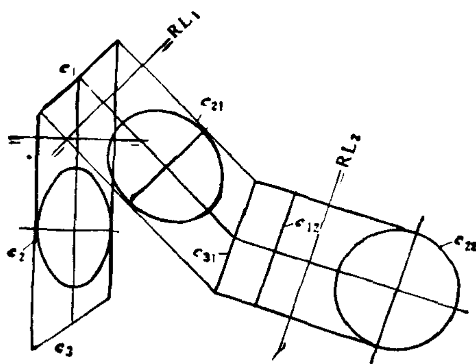


图8-8 圆的投影变换

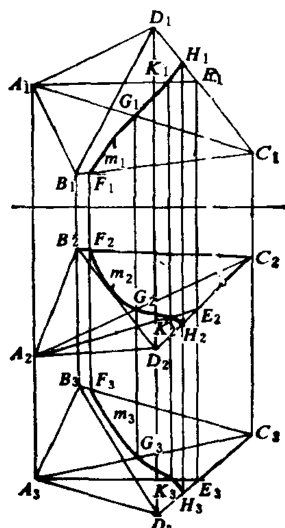


图8-9 属于同一超平面上曲线的投影

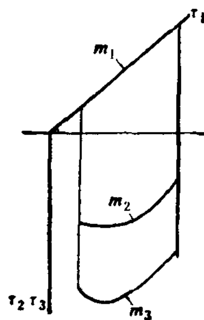


图8-10 曲线投影的特殊情况

点，图中给出了在 m 上的点 K 的具体作图步骤。

如果曲线属于同一超平面，其投影一般仍为曲线；如果曲线所在的超平面垂直于某一投影面，则曲线在该投影面上的投影为直线，如图 8-10 所示。

当投射方向与曲线 m 上某一点的切线平行时，则曲线 m 的投影可呈现尖点，如图8-11所示。在第Ⅰ部分中，当切线 t 垂直于一投影面（如 π_{31}）时，则 m_{31} 呈现尖点。在第Ⅱ部分中，切线 t 垂直于一投影空间（如 Σ_{21}）时，则 m 在该投影空间的超投影呈现

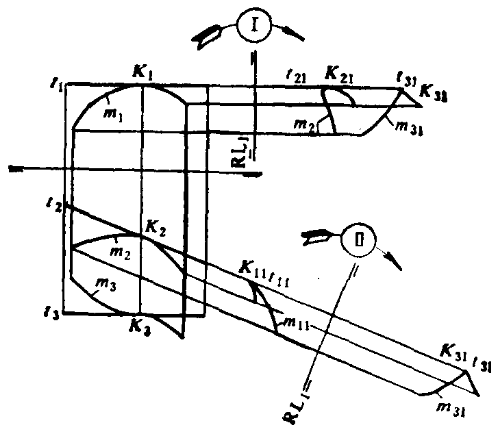


图8-11 曲线投影中呈现尖点的情况

尖点，即 m_{11}、m_{31} 呈现尖点。

第二节 曲 面

四维空间中，曲面 S 是二维的，其参数方程一般为：

$$\begin{cases} x = x(v、w) \\ y = y(v、w) \\ z = z(v、w) \\ u = u(v、w) \end{cases}$$

x、y、z、u 都是 v、w 的二元函数，即曲面 S 可由两族参数曲线（v 曲线、w 曲线）交织而成。在四维空间中，曲线的超投影一般仍是曲线，因此在曲面 S 上参数曲线的超投影即为 S 的超投影（二维曲面）上的参数曲线，也即在四维空间中，二维曲面的超投影一般仍是二维曲面。

一、规则曲面

四维空间中，规则曲面的形成与三维空间中的情况基本相同。

（一）直纹曲面

1. 柱面

四维空间中柱面形成的条件是：直母线既沿一曲导线（可以是闭合的或非闭合的）移动，又平行于一直导线。

图 8-12 是一柱面的投影图。其中，c 为曲导线，l 为直导线。若该曲面与一超平面 T 相交，则交于曲线 m。

2. 锥面

四维空间中锥面形成的条件是：直母线既沿一曲导线（可以是闭合的或非闭合的）移动，又通过一定点。

图 8-13 是一锥面的投影图。其中，曲线 c 为曲导线，S 为定点。若已知点 K 从属于该锥面，由于它位于锥面的一条素线上，因此可根据 K 的一个投影（如 K_1）求出其它的投影（K_2、K_3），具体作图过程如图 8-13 所示。

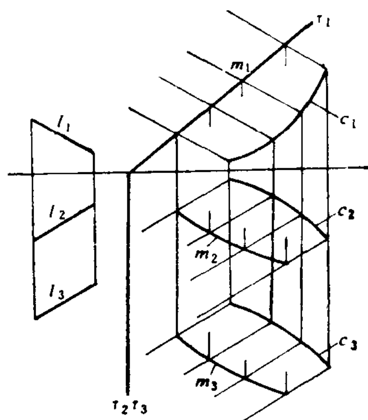


图8-12 四维空间中柱面的投影

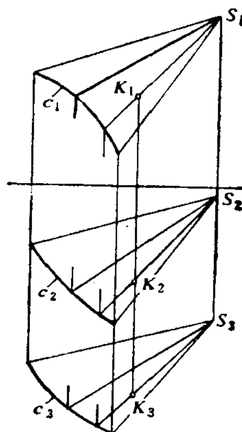


图8-13 四维空间中锥面的投影

3. 锥状面

四维空间中锥状面形成的条件是：直母线沿一曲导线和一直导线移动，又平行于一导超平面。

图 8-14 是锥状面的投影图。其中 c 为曲导线，l 为直导线，T 为导超平面。

4. 柱状面

四维空间中柱状面形成的条件是：直母线沿两曲导线移动，又同时平行于一导超平面。

图 8-15 是柱状面的投影图，其中 m、n 为曲导线，T 为导超平面。

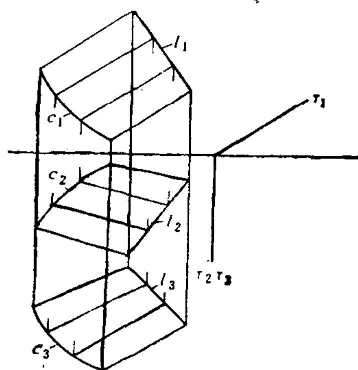


图8-14　四维空间中锥状面的投影

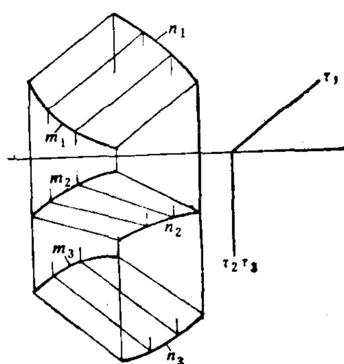


图8-15　四维空间中柱状面的投影

对于四维空间中双曲抛物面的形成和图示与上述情况基本相同。

5. 直纹曲面的超投影

四维空间中直纹曲面的超投影是一个有趣而值得深入研究的问题，现简略分析如下：

（1）四维空间中锥面的超投影可以是锥面、平面。

图 8-16 中，当锥面 Φ 上曲导线 c 所在的平面垂直于一投影空间（如 Σ_3）时，它在 Σ_3 中的超投影$(\Phi)_3$为平面，而$(\Phi)_1$、$(\Phi)_2$为锥面。

显然，当锥面 Φ 上曲导线 c 不从属于一平面时，不论它处于什么位置，所得的超投影只能是锥面。

（2）四维空间中柱状面的超投影可以是锥状面、柱状面、双曲抛物面、不规则曲面等

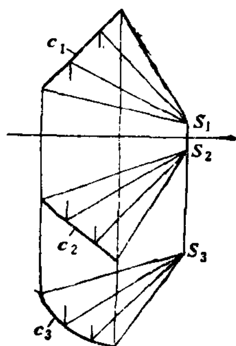


图8-16　分析锥面的超投影

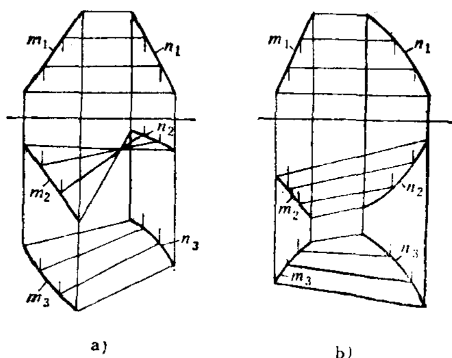


图8-17　分析柱状面的超投影

（设该柱状面的导超平面平行于 Σ_1）。

图 8-17 a 中，当柱状面 S 上两曲导线 m、n 所在的平面均垂直于同一投影空间（如 Σ_3）时，$(S)_3$ 为双曲抛物面，$(S)_2$ 为柱状面，$(S)_1$ 为不规则曲面。

图 8-17 b 中，当柱状面 S 上一曲导线 m 所在的平面垂直于一投影空间 Σ_1，另一曲导线 n 为一般位置时，$(S)_3$ 为锥状面，$(S)_2$ 为柱状面，$(S)_1$ 为不规则曲面。

（3）四维空间中锥状面的超投影可以是平面、锥面、锥状面、双曲抛物面、不规则曲面等（设导超平面平行于 Σ_1）。

图 8-18 a 中，当锥状面 S 上曲导线 c 所在的平面垂直于一投影空间（如 Σ_3），而直导线 l 为一般位置时，$(S)_3$ 为双曲抛物面，$(S)_2$ 为锥状面，$(S)_1$ 为不规则曲面。

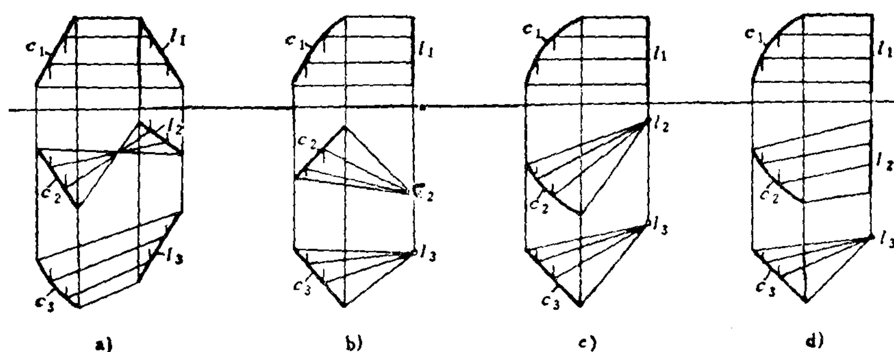


图8-18 分析锥状面的超投影

图 8-18 b 中，当曲导线 c 垂直于 Σ_1，直导线 l 也垂直于 Σ_1 时，$(S)_1$ 为平面，$(S)_2$、$(S)_3$ 为锥状面。

图 8-18 c 中，当曲导线 c 所属的超平面垂直于 π_3，而直导线 l 垂直 Σ_1 时，$(S)_1$ 为锥面，$(S)_2$、$(S)_3$ 为锥状面。

图 8-18 d 中，当曲导线 c 所属的超平面垂直于 π_3，直导线 l 垂直于 π_3 时，$(S)_1$ 为不规则曲面，$(S)_2$、$(S)_3$ 为锥状面。

总之，在四维空间中，各种直纹曲面在不同情况下的超投影有多种多样，不再一一详述。

（二）球面的投影

我们知道，三维空间中的圆属于（且只能属于）它本身所在的平面。同理，四维空间中的球面也属于（且只能属于）它本身所确定的超平面。

当球面所在的超平面平行于一投影空间时，它在该投影空间的超投影为相同半径的球面。当球面所在的超平面垂直于一投影空间时，它在该投影空间的超投影为与球面半径相同的圆。当球面所在的超平面倾斜于一投影空间时，它在该投影空间的超投影为椭球面。

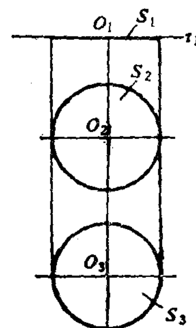


图8-19 球面所在空间平行于一投影空间时的投影

根据球面所在超平面的不同位置，它的投影有以下几种情况：

1．平行于一投影空间

在图 8-19 中，设球面 S 所在的超平面 T 平行于 Σ_1，则 $(S)_1$ 反映 S 的实形。由于 T 又垂直于 Σ_2、Σ_3，所以 $(S)_2$、$(S)_3$ 为与球面半径相

同的圆。

2. 垂直于一投影面

设球面S所在的超平面T垂直于π_1，即垂直于Σ_2、Σ_3，而倾斜于Σ_1。因此，$(S)_2$、$(S)_3$为一圆，而$(S)_1$为椭球面，如图8-20所示。显然，如果需要求出球面S的实形，只需变换投影一次，即使S所属的超平面平行于一新的投影空间。

3. 垂直于一投影空间

设球面S所在的超平面T垂直于Σ_3，且倾斜于Σ_1、Σ_2，因此$(S)_3$为圆，而$(S)_1$、$(S)_2$为椭球面，如图8-21所示。现以球面S上的圆c为例加以说明，由于c所在的平面垂直于Σ_3，且倾斜于Σ_1和Σ_2，所以$(c)_3$为直线（即c_1、c_2是直线），而$(c)_1$、$(c)_2$为椭圆（即c_3必为椭圆）。事实上，如在球面S上取一系列平行于圆c的圆，则S_3即为一族椭圆的包络线。

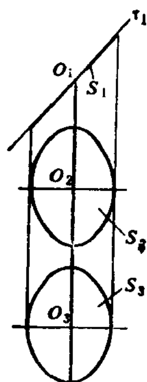


图8-20 球面所在空间垂直于一投影面的投影

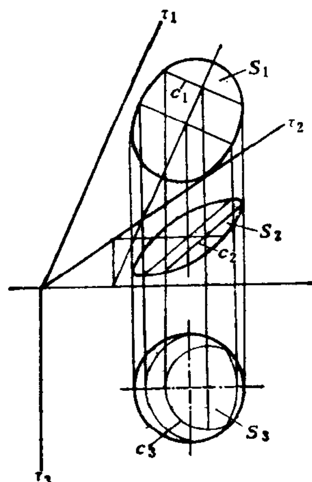


图8-21 球面所在空间垂直于一投影空间时的投影

4. 一般位置

设球面S所在的超平面T与各投影空间均倾斜，则$(S)_1$、$(S)_2$、$(S)_3$均为椭球面，如图8-22所示。如果辅助超平面$\Lambda(/\!/\Sigma_1)$与S相交，可截得一椭圆。

应指出，由于球面S所在的超平面不能同时平行于两个投影空间，即球面的各超投影中不可能有两个超投影都是球，因此，四维空间中球面的各投影S_1、S_2、S_3不可能都是圆。

二、不规则曲面

1. 不规则曲面的超投影

在四维空间中，不规则（变母线）曲面S的超投影一般仍为不规则曲面。在特殊情况下，其超投影为直纹曲面。要使不规则曲面S的超投影成为直纹曲面，其条件是：当曲面S由三条边界曲线所确定时，其中至少需有一条边界曲线所在的平面垂直于该投影空

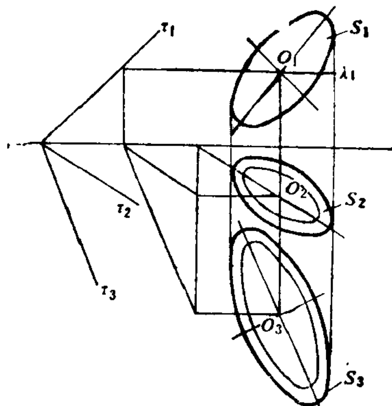


图8-22 球面所在空间与各投影空间均倾斜时的投影

间；当曲面 S 由四条边界曲线所确定时，其中至少需有两条（非相邻的）边界曲线所在的平面均垂直于该投影空间。

现设四维空间中不规则曲面 S 由三条边界曲线 AB、BC、AC 所确定。其中，AB 所在的平面既平行于 Σ_2 又垂直于 Σ_1；BC 所在的平面平行于 Σ_3、Σ_4，即平行于 π_4；AC 所在的平面既平行于 Σ_1 又垂直于 Σ_3。因此，超投影 $(AB)_1$、$(BC)_1$、$(BC)_2$、$(AC)_3$ 为直线。图8-23a 为该曲面 S 的六面投影图（S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6）。其中，S_2、S_3、S_6 确定曲面 S 在 Σ_1 中的超投影（S）$_1$；S_1、S_3、S_5 确定曲面 S 在 Σ_2 中的超投影（S）$_2$；S_1、S_2、S_4 确定曲面 S 在 Σ_3 中的超投影（S）$_3$；S_4、S_5、S_6 确定曲面 S 在 Σ_4 中的超投影（S）$_4$。

现进一步分析曲面 S 的各超投影：

（1）在（S）$_1$ 的边界线中，$(AB)_1$、$(BC)_1$ 为直线，$(AC)_1$ 为曲线。如设 $(AC)_1$为曲导线，$(B)_1$ 为定点，则（S）$_1$ 可为锥面。

（2）在（S）$_2$ 的边界线中，$(AB)_2$、$(AC)_2$ 为曲线，$(BC)_2$ 为直线。如设 $(AB)_2$、$(AC)_2$ 为曲导线，π_1 为导平面，则（S）$_2$ 可为柱状面。

（3）在（S）$_3$ 的边界线中，$(AB)_3$、$(BC)_3$ 为曲线、$(AC)_3$ 为直线。如设 $(AB)_3$、$(BC)_3$ 为曲导线，π_2 为导平面，则（S）$_3$ 可为柱状面。

（4）在（S）$_4$ 的边界线中，$(AB)_4$、$(BC)_4$、$(AC)_4$ 均为曲线，则（S）$_4$ 为不规则曲面。

图 8-23 b 、c 为上述各超投影的示意图。

2. 不规则曲面与超截面相交

在四维空间中，不规则曲面 S 与超截面的交线一般不能直接确定；如果曲面 S 的各超投影中有两个以上为直纹曲面时，则其交线是可求的。

现简略证明如下：

设曲面 S 与辅助超截面 T（$/\!/ \Sigma_1$）的交线为曲线 MN。当 S 的各超投影中有两个是直纹曲面时，如（S）$_1$、（S）$_3$ 为直纹曲面，它们与相应迹面（即 T 与 Σ_1、Σ_3 的交平面）的交线 $(MN)_1$、$(MN)_3$ 是可求的，即可求出五个投影 M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3、M_4N_4，M_6N_6，于是 M_5N_5 也可求得。因此，MN 可求得。

如果 S 的各超投影中只有一个是直纹曲面，如（S）$_1$ 为直纹曲面，则只有 $(MN)_1$ 可求出，即可作出 M_2N_2、M_3N_3、M_6N_6，而无法由它们求得 M_1N_1、M_4N_4、M_5N_5。因此，MN 不能求得。如果曲面 S 的各超投影均为非直纹曲面，则 MN 不可能求出。

图 8-23 a 是确定曲面 S 分别与辅助超截面 T、Λ 的交线 MN、RT 的具体作图步骤：

（1）作辅助超截面 T $/\!/ \Sigma_1$，它与曲面 S 的交线为曲线 MN。由于（S）$_3$ 是以 π_2 为导平面的柱状面，所以 $(MN)_3$ 为直线。在 MN 的各投影中：已知 M_1N_1、M_4N_4、M_5N_5；M_2N_2 是直线，可由 M_1N_1、M_4N_4 求得；M_3N_3、M_6N_6 是曲线，利用投影关系可求出它们的端点 M_3、N_3 和 M_6、N_6。

（2）另作辅助超截面 Λ $/\!/ \Sigma_3$，它与曲面 S 的交线为曲线 RT。由于（S）$_2$ 是以 π_1 为导平面的柱状面，所以 $(RT)_2$ 为直线。在 RT 的各投影中：已知 R_3T_3、R_5T_5、R_6T_6；R_1T_1为直线，可由 R_3T_3 求得；R_2T_2、R_4T_4 是曲线，利用投影关系求出它们的端点 R_2、T_2 和 R_4、T_4。

（3）MN 与 RT 均是曲面 S 上的曲线，它们相交于点 K。它的投影 K_1 即为 M_1N_1 与

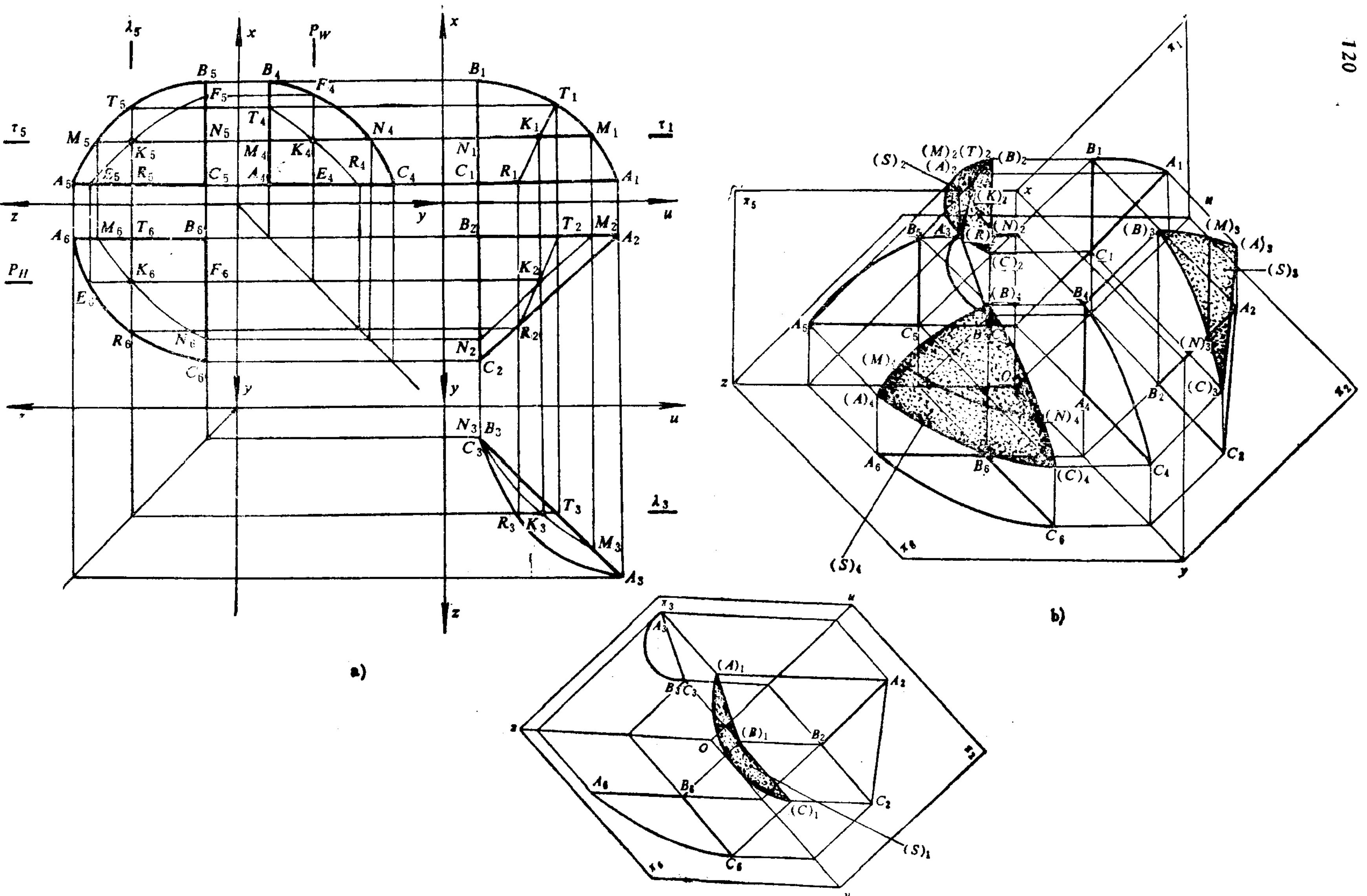


图8-23　不规则曲面

R_1T_1的交点。K_5是M_5N_5与R_5T_5的交点，并由K_1、K_5先后求得K_2、K_3、K_4、K_6。这样，便可求得曲线MN与RT，它们也是曲面S上的型线（当超截面平行于投影空间时，与曲面S的交线称为型线）。

（4）同理，可求得曲面S上的其它一系列型线。

第三节 超曲面

四维空间中的超曲面是三维的。由于人类生活在三维空间，对于四维空间中的超曲面当然是难以理解的。但是，可以通过分析超曲面的形成、超截面与超曲面的截口形状以及利用解析分析来帮助我们“想象”超曲面的构成和“形状”。

在三维空间中，形成曲面的母线可以是一维的直线或曲线，而在四维空间中形成超曲面的“母线”可以是二维曲面，有时也可以是一维的直线或曲线。

四维空间中的超曲面可以看成是由一、二维曲面（母面）在四维空间作有规则或无规则运动所得。母面在运动时可以是固定不变的，也可以是连续而有规则（或无规则）的变化。

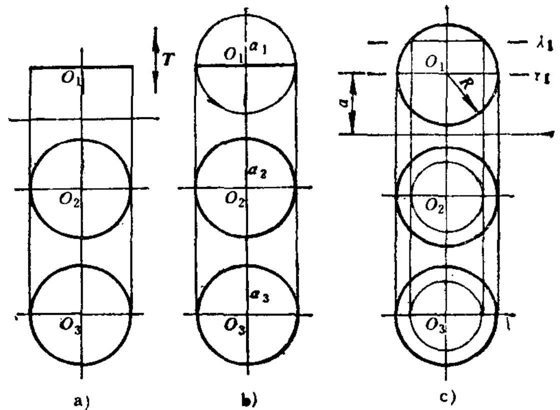


图8-24 超球面的形成

由上述分析可知，超曲面由三个因素决定：即母面的形状，母面的运动规律，母面在运动时的变化情况。因此，可以设想超曲面包容无数个二维曲面。

一、超球面

设四维空间中超球面的母面为球面$S(/\!/\Sigma_1)$，则超球面可由下述两种情况形成：

（1）将球面S沿方向$T(/\!/x)$上、下移动，在移动过程中母面的半径有规则地逐渐缩小至零，如图8-24a所示。

（2）由母面绕平面$\alpha(\perp x_1)$旋转，旋转时母面大小不变，如图8-24b所示。

在四维空间中，超球面的超投影是球面。现用解析法予以说明：

在四维空间中，半径R、球心坐标$O(a、b、c、d)$的超球面的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=R^2 \quad (8\text{-}1)$$

设投影方向平行于ou，将$u=d$代入式（8-1），消去u，得上述超球面在$\Sigma_1(Oxyz)$中的超投影是一个三维空间中的球面，即

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (8\text{-}2)$$

超球面被任意位置的超平面所截，均可截得二维球面。当辅助超截面$\Lambda(/\!/\Sigma_1)$与超球面相交时，所截得的球面在Σ_1中的超投影反映实形，如图8-24c所示。

由式（8-1）得：

$$(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=R^2-(x-a)^2 \quad (8\text{-}3)$$

显然，随着x值改变，可以得到一系列不同半径的球面。若$x=a$，则

$$(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=R^2$$

即所截得的球面为最大。

若 $x=\pm R+a$ 时，所截得球的半径为零。

当超截面T倾斜于 Σ_1(又垂直于 π_1) 时，所截得的球面在 Σ_1 中的超投影为椭球面，如图8-25 所示。图中还应用投影变换，求得了该球面的实形。

在超球面上取点的步骤和方法与前述在超平面上取点的情况相似。设超球面上有一点 K，已知 K_1、K_3，求 K_2。具体作图步骤如下（图 8-26）：

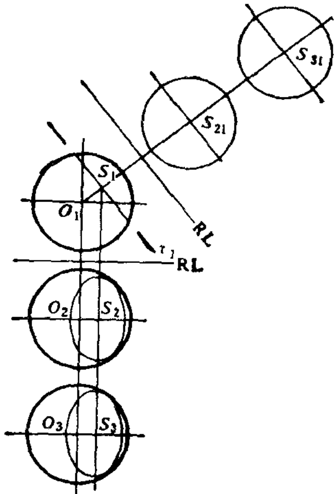


图8-25 超球面与超截面相交

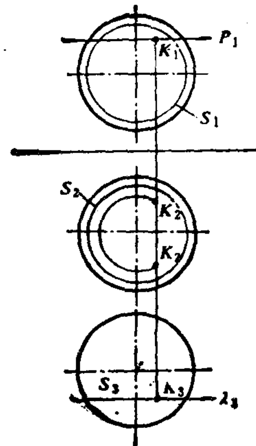


图8-26 超球面上取点

（1）过 K_3 作辅助超平面 $\Lambda(/\!/\Sigma_3)$，它与超球面交于球面 S，所求点 K 必定位于 S 上。

（2）由于 S 属于 Λ 内，所以，可用三维画法几何方法，由 K_1 求得 K_2。

二、超柱面

超圆柱面可由以下三种情况形成：

（1）设四维空间中超圆柱面的母面为球面 $S(/\!/\Sigma_1)$，使 S 沿方向 $T(/\!/ox)$ 移动，移动时母面 S 的半径不变，如图 8-27 a 所示。

（2）设一圆柱面 $S(/\!/\Sigma_3)$ 为母面，并使 S 绕包括该柱面轴线的平面 α ($\perp\pi_3$) 旋转，旋转时母面的大小不变，如图 8-27 b 所示。

（3）以一圆柱面 $S(/\!/\Sigma_3)$ 为母面，并使 S 沿方向 $T(/\!/oz)$ 移动，移动时母面 S 的半径有规律地缩小至零，如图8-27 c 所示。

超圆柱面被超平面所截，可截得球面、椭球面、圆柱面。

当超截面T垂直于超圆柱面的轴线时，截得的球面与母球面大小相同，如图 8-28 a 所示。

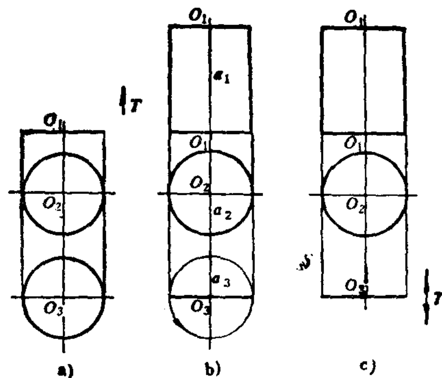


图8-27 超柱面的形成

当超截面T倾斜于超圆柱面的轴线时，截得椭球面，如图 8-28 b 所示。此时，椭球面在 Σ_1 中的超投影为球面，它的实形可通过投影变换求得。

当超截面T平行于超圆柱面的轴线时，截得圆柱面。图 8-29 a 中，超截面 $\Lambda(/\!/\Sigma_3)$ 可截得一半径为 r 的圆柱面，它在 Σ_3 中的超投影反映实形。图 8-29 b 中，超截面 Λ 垂直于 π_3，倾斜于 Σ_3，截得的圆柱面在 Σ_3 中的超投影为椭圆柱面，它的实形可通过投影变换求得。

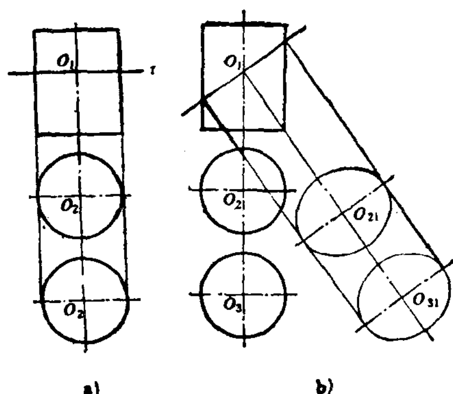


图8-28 超柱面与超截面相交

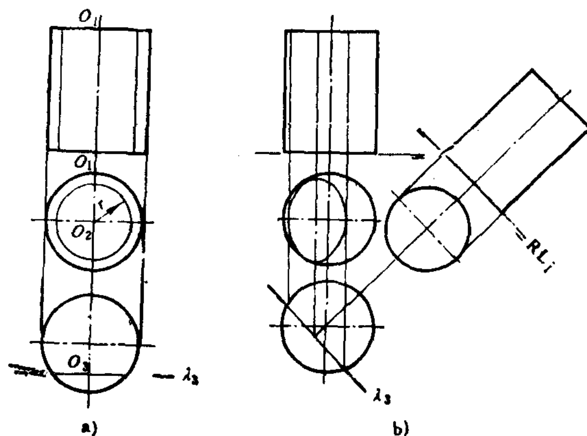


图8-29 超柱面与超截面相交

超斜椭圆柱面的形成与超圆柱面相比，其差别仅在于其母球面移动的方向T倾斜于投影空间，如图 8-30 a 所示。当超截面 T $/\!/\Sigma_1$ 时，在超斜椭圆柱面上截得与母面同样大小的球面，如图 8-30 b 所示。

当超截面T垂直于超斜椭圆柱面的轴线时，可截得一椭球面，如图 8-31 a 所示。

当超截面T平行于超斜椭圆柱面的轴线时，可截得一椭圆柱面，如图 8-31 b 所示。

三、超锥面

超圆锥面可由下述两种情况形成：

（1）四维空间中的球面 S（$/\!/\Sigma_1$）沿方向 T（$/\!/x$）移动，移动时母球面 S 的半径有规律地逐渐缩小至零，如图 8-32 a 所示。

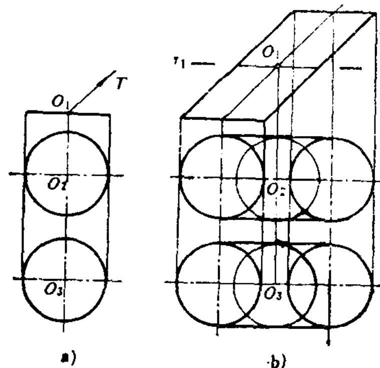


图8-30 超斜椭圆柱面的形成

（2）四维空间中的母锥面 S（$/\!/\Sigma_3$）绕包含该锥面轴线的平面 α（$\perp\pi_3$）旋转，旋转时母锥面大小不变，如图 8-32 b 所示。根据其形成原理可知，当超截面T通过其轴线，并垂直于 π_3 时，可截得与母锥面同样大小的锥面，但它在 Σ_3 中的超投影为一椭圆锥面，如图8-32 c 所示。

当超截面T垂直于超圆锥面的轴线时，可截得一半径为 r 的球面，如图 8-33 a 所示。

当超截面T平行于超圆锥面的轴线时，可截得一双叶双曲回转面，如图 8-33 b 所示。

当超截面T倾斜于超圆锥面的轴线时，可截得一椭球面，如图 8-33 c 所示。

超斜椭圆锥面的形成与超圆锥面相比，其差别仅在于母球的移动方向 T 倾斜于投影空间，如图 8-34 a 所示。当超截面 T $/\!/\Sigma_1$ 时，它与超斜椭圆锥面截得一半径为 r 的球面，如图

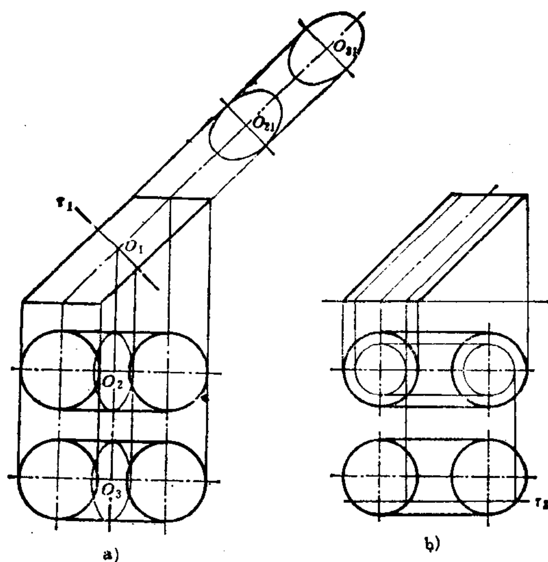


图8-31　超斜椭圆柱面与超截面相交

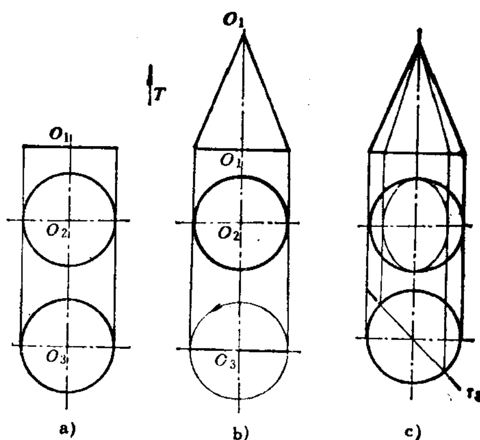


图8-32　超圆锥面的形成

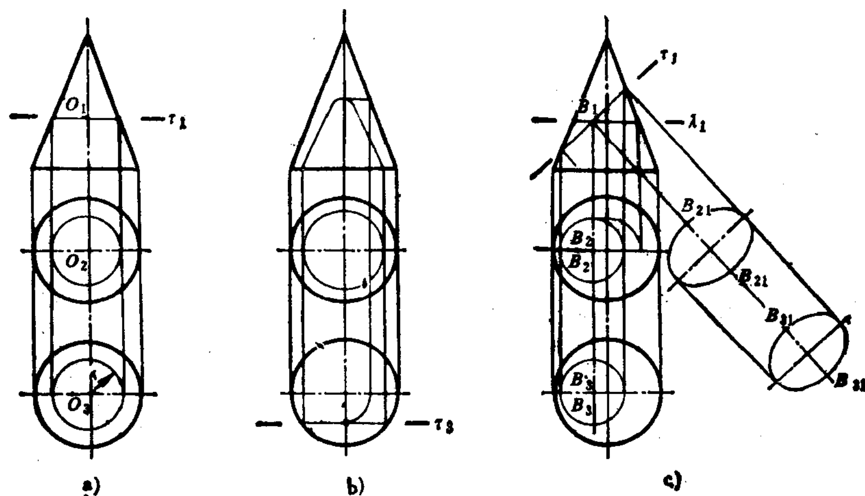


图8-33　超圆锥面与超截面相交

8-34 b 所示。如果在母球面上任取一圆 c，并与顶点相连，即可在超斜椭圆锥面上取出一斜圆锥面，如图 8-34 c 所示。

例　试求直线 l 与超斜椭圆柱面的交点。

解： 如图 8-35 所示

（1）在超斜椭圆柱面上取一系列斜椭圆柱面（作图方法参见图 8-34 c）。

（2）过直线 l 作辅助超平面 T（$\perp \pi_1$），并分别求出它与各斜椭圆柱的交线（椭圆），一系列椭圆的集合为一椭球面 α，即为辅助超平面 T 与超斜椭圆柱面所截得的曲面。

（3）由于椭球面 α 与直线 l 共存于辅助超平面 T 内，可采用类似三维画法几何的方法，即过直线 l 作辅助平面 P，它与椭球面交于椭圆 c，该椭圆与直线 l 的交点 M、N 即为

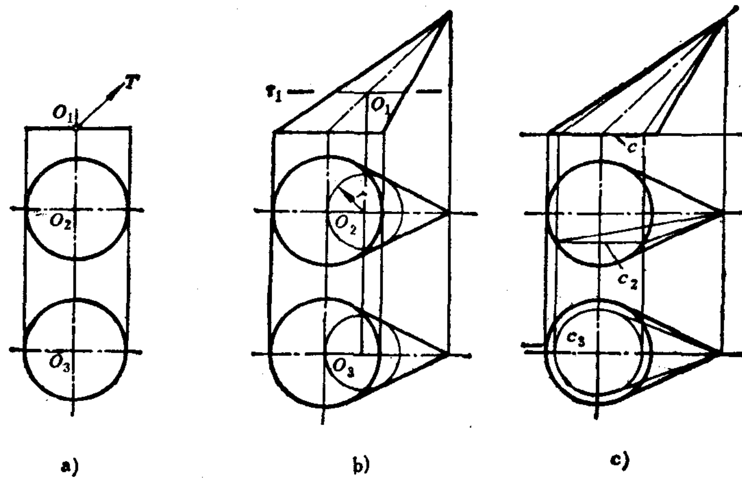


图8-34 超斜椭圆柱面

所求。

四、超椭球面

超椭球面可由下述两种情况形成：

（1）四维空间中的椭球面 $S(\parallel\Sigma_1)$ 沿方向 $T(\parallel x)$ 移动。移动时，椭球面的各轴按一定规律逐渐缩小至零，如图 8-36 a 所示。当超截面 T $\parallel \Sigma_1$ 时，可截得一各轴都缩短的椭球面，如图 8-36 b 所示。

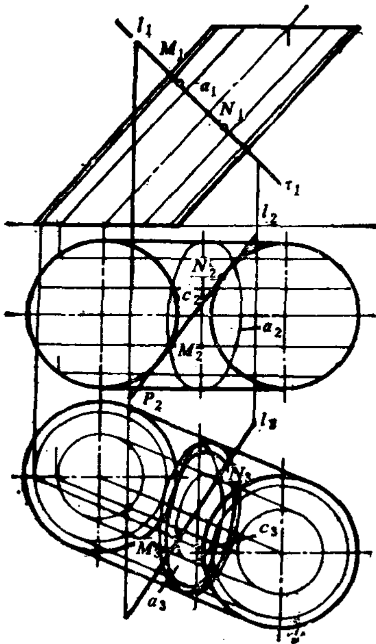


图8-35 确定直线与超斜椭圆柱面的交点

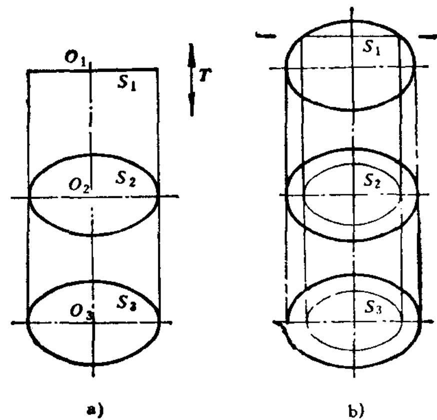


图8-36 超椭球面的形成

（2）设四维空间中的球面 $S(\parallel\Sigma_4)$ 沿方向 $T(\parallel u)$ 移动。移动时，球面 S 的半径按一定规律逐渐缩小至零，如图 8-37 所示。当超截面 $\Lambda\parallel\Sigma_4$ 时，可截得一半径为 r 的球面。图中

还表示了另一超截面Ω（⊥π_1）与超椭球面相截交的情况。

五、超环面

超环面可以看成是一母球面S（$/\!/\Sigma_1$）绕平面α（$\veebar\pi_1$）旋转，旋转时母面S的大小不变，如图 8-38 a 所示。

当超环面与超截面Λ（$/\!/\Sigma_3$）相交时，可截得一环面，如图 8-38 b 所示。

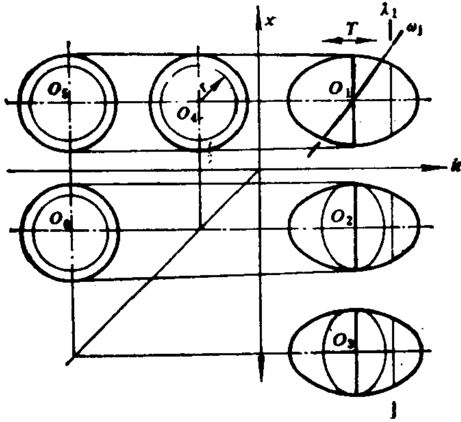


图8-37　超椭球面与超截面相交

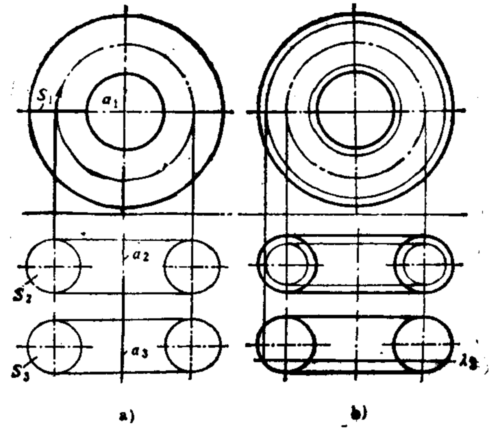


图8-38　超环面的形成及与超截面相交

第三篇　其他体系中的多维画法几何学

第九章　直角坐标体系中的四维画法几何学

应用直角坐标体系来论述四维空间中的画法几何学，具有蒙若法直角投影作图的优点，同时也能使图形分开从而提高其清晰程度。

第一节　几何元素的图示法

一、四维坐标轴的建立

如图9-1所示，从原点O作互相垂直的四根轴为直角坐标轴，分别以x、y、z、u表示。为便于作图，x和z、y和u在一直线上，但应认为这四根轴中任何两根都是互相垂直的。这四根轴形成六个投影面。其中四个投影面为xy、yz、zu、ux。如图9-2所示，另外两个投影面，可作45°辅助线，将u（或y）旋转90°，与y（或u）轴形成投影面yu；同理，将z（或x）旋转90°，与x（或z）轴形成投影面xz。可以看出，xu与yz，xy与zu为绝对垂直，它们相交于坐标原点。

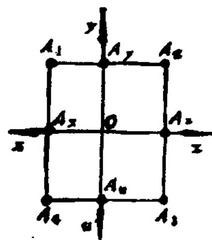


图9-1　四维坐标轴的建立和点的投影图

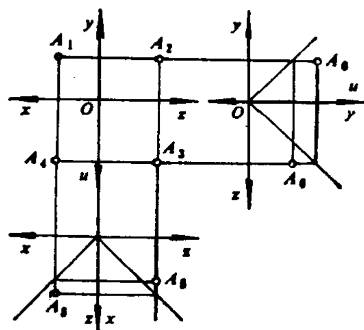


图9-2　点的六面投影图

四维空间中有四个三维子空间yzu、xzu、xyu、xyz，分别以Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4表示。

二、四维空间中点的投影

若已知点A（x_A、y_A、z_A、u_A），则可在坐标轴上分别截取各点A_x、A_y、A_z、A_u。然后，从这些点作坐标轴的垂直线，得点A在各个投影面上的投影A_1、A_2、A_3、A_4，再通过45°辅助斜线作出投影A_5、A_6（图9-1及图9-2）。显然，$A_1A_2A_5$、$A_2A_6A_3$、$A_1A_4A_6$、$A_5A_3A_4$分别为点在xyz、yzu、xyu、xzu四个三维子空间中的投影，以x、y、z、u为基线的各组投影分别为$A_1A_5A_4$、$A_1A_2A_6$、$A_5A_2A_3$、$A_4A_6A_3$。

三、四维空间中直线的投影

图9-3为直线AB的投影图。利用直角三角形法可求出线段的实长。其作法有二种：其

一是逐次进行作图，如图 9-3 所示，以 A_2B_2 作为一直角边，逐步以 Δx、Δu 作为另一直角边求出其实长；其二是利用绝对垂直的两个投影面上的投影作为两个直角边，求出其斜边即为线段实长，如图 9-3 所示，以 A_3B_3、A_1B_1 为直角边，求出线段 AB 的实长。

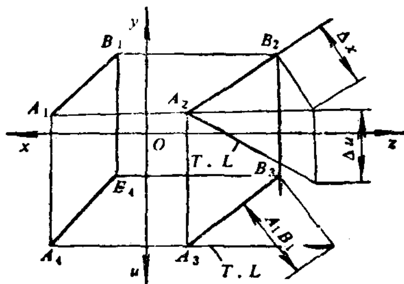


图9-3 直线的投影图

图 9-4 为平行于 Σ_1（yzu）的直线 AB 的投影图。由于 $x_A = x_B$，因此 $A_1B_1 /\!/ y$，$A_4B_4 /\!/ u$。AB 在 Σ_1 中的超投影（AB）$_1$ 反映实长，应用直角三角形法由投影 A_2B_2、A_3B_3 即可求得 AB 的实长。

图 9-5 为垂直于 xy 面（即平行 Σ_1 和 Σ_2）的直线的投影图。由于 $x_A = x_B$，$y_A = y_B$，因此在 xy 面上的投影 A_1B_1 重影为一点，$A_2B_2 \perp y$，$A_4B_4 \perp x$。若直线 AB 垂直于 xy 面，则必定平行于 zu 面，因此 A_3B_3 反映线段的实长。

图 9-6 为垂直于 Σ_1（即平行 Σ_2、Σ_3、Σ_4）的直线的投影图。由于 $y_A = y_B, z_A = z_B, u_A = u_B$，因此在 yz、zu 面上的投影 A_2B_2、A_3B_3 重影为一点，显然，投影 A_1B_1、A_4B_4 反映线段的实长。

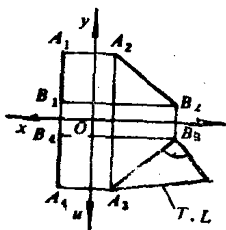


图9-4 平行于Σ_1的直线的投影图

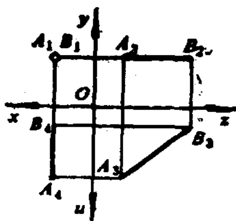


图9-5 垂直于xy面的直线的投影图

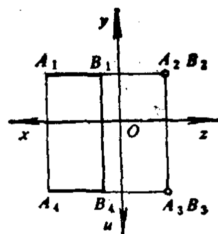


图9-6 垂直于Σ_1的直线的投影图

四、四维空间中平面的投影

图 9-7 为一般位置平面△ABC 的投影图。图 9-8 为平行于 Σ_1 的平面的投影图。图 9-9 为平行于 zu 面（即垂直于 xy 面）的平面的投影图，因此△$A_3B_3C_3$ 反映△ABC 的实形，$A_1B_1C_1$ 重影为一点。

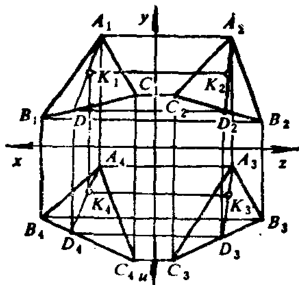


图9-7 一般位置平面的投影图

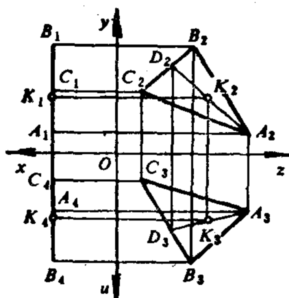


图9-8 平行于Σ_1的平面的投影图

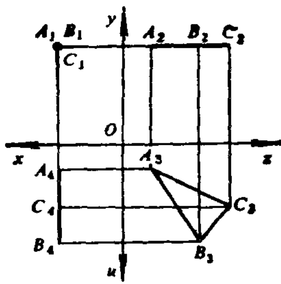


图9-9 平行于zu面的平面的投影图

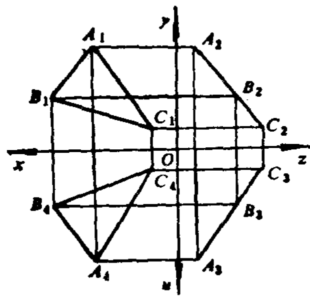


图9-10 垂直于Σ_1的平面的投影图

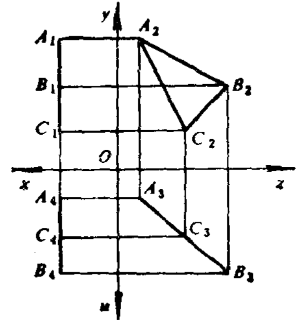


图9-11 平行于Σ_1且垂直于Σ_2的平面的投影图

图 9-10 为垂直于 Σ_1 的平面的投影图，平面在 Σ_1 中的投影为直线，其投影 $A_2B_2C_2$、$A_3B_3C_3$ 也为直线。图 9-11 为平行于 Σ_1 且垂直于 Σ_2 的平面的投影图。

五、超平面的投影

图 9-12 为超平面 $ABCD$ 的投影图。图 9-13 为用迹线表示的超平面的投影图。

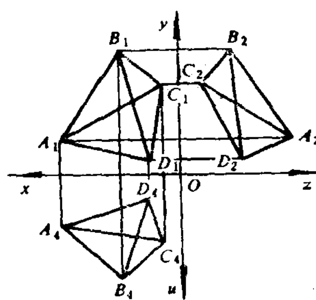


图9-12 超平面的投影图

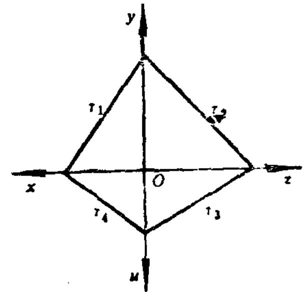


图9-13 超平面的迹线表示法

由非迹线表示的超平面可以转化为由迹线表示。因此，欲求超平面的迹线，可先求出超平面中的平面与投影面的交点（迹点），然后，连接同面迹点，即得迹平面的同面迹线。欲求超平面中某一平面的迹点，有两种途径（图 9-14）：

（1）求超平面中某一平面在两个投影空间（如 Σ_1 与 Σ_3 或 Σ_2 或 Σ_4）中的超投影的两条迹线。这两条迹线在相邻的投影面上，即它们为同一投影空间中一直线的两个投影。然后按三维画法几何方法求出其迹点，即为超平面在该投影面上的迹线上的一个迹点。如图 9-14 所示，已知超平面T，首先分别求出平面 BCD 在 Σ_2 中的投影 $(BCD)_2$ 在 xu 面上的迹线 M_4N_4，以及在 Σ_4 中的投影 $(BCD)_4$ 在 xy 面上的迹线 M_1N_1，M_4N_4 和 M_1N_1 同处在 Σ_3 空间，然后求出其迹点 P_1 和 Q_4，即为超平面T在 xy 和 xu 面上的迹线 τ_1 和 τ_4上的迹点。由于 A_2D_2 通过原点，因此可以直接求出 xu 面上的另一迹点 R_4。R_4 与 Q_4 的连线即为迹线 τ_4。τ_4 与 x 的交点为 τ_x，τ_x 与 P_1 的连线即为 τ_1。τ_1 与 y 轴的交点为τ_y。

（2）求超平面中某一平面在两个投影空间（如 Σ_1 与 Σ_4 或 Σ_2 或 Σ_3）中的超投影的两条迹线。这两条迹线在同一投影面上，它们的交点即为该平面在投影面上的迹点。如图 9-14 所示，可分别求出 BCD 平面在 Σ_1 中的投影 $(BCD)_1$ 在 yz 面上的迹线 S_2U_2，以及在 Σ_4 中的投影 $(BCD)_4$ 在 yz 面上的迹线 V_2W_2，$S_2U_2=g_2$ 与 $V_2W_2=h_2$ 的交点 J_2 即为 BCD 平面与 yz 面的交点，连接 τ_y 与 τ_z 即为所求的迹线 τ_2。

显然，射线 V_2U_2、S_2W_2 将通过中心 D_2，因此可认为 V_2 与 U_2、S_2 与 W_2 是通过 D_2 的对应点，它们分别处在 D_2C_2、D_2B_2 上。同样可以在 D_2A_2 上作出相应的两个点（图上未作出），与上述两对点，形成三对对应点，根据笛沙格定理其对应直线的交点必定在一直线上，

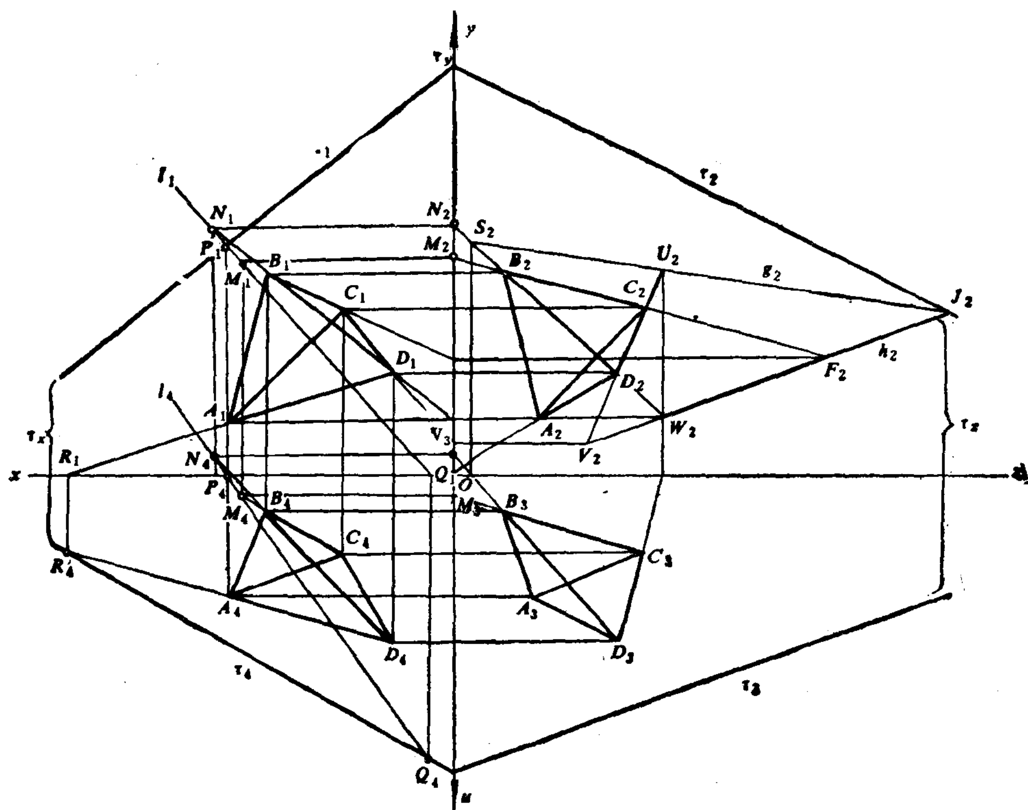


图9-14　由非迹线表示的超平面转化为由迹线表示的作图方法

该直线即为迹线 τ_2。

图 9-15 为平行于 Σ_1（即垂直于 Σ_2、Σ_3、Σ_4）的超平面T的投影图。这时 τ_1、τ_4 具有重影性。图 9-16 为垂直于 Σ_1、Σ_2（即垂直于 zu 面）的超平面T的投影图，迹线 τ_3 具有重影性。图 9-17 为垂直于 Σ_1（即平行于 x 轴）的超平面T的投影图。

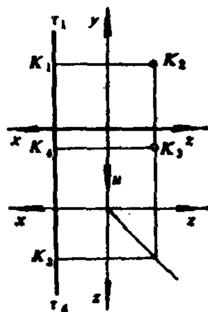


图9-15　平行于Σ_1的超平面的投影图

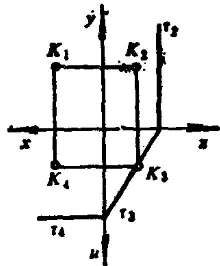


图9-16　垂直于zu面的超平面的投影图

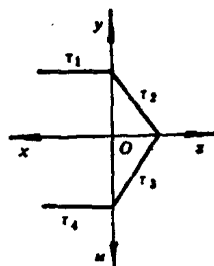


图9-17　垂直于Σ_1的超平面的投影图

第二节　几何元素间的相对位置

一、两超平面相交

如图 8-18 所示，两超平面T、A 相交，其同面迹线的交点即为两超平面的共有点，连

接各点的同面投影即为交平面的各个投影。一般应有三对同面迹线相交即可求出两超平面的交平面。

图 9-19为平行于Σ_1的超平面T与一般位置超平面Λ的交平面MPQ的作图方法。由于$\tau_1 /\!/ y$，即$M_1P_1 /\!/ y$，则$M_2P_2 /\!/ \lambda_2$；同理，$P_4Q_4 /\!/ u$，则$P_3Q_3 /\!/ \lambda_3$。实际上，M_2P_2、P_3Q_3即为交平面在Σ_1中对yz、zu的迹线。

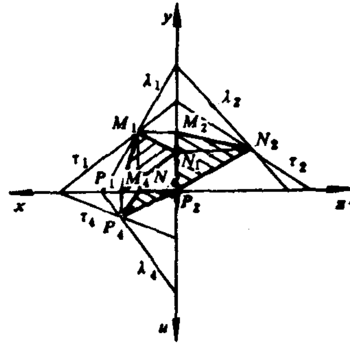


图9-18 一般位置的两个超平面相交

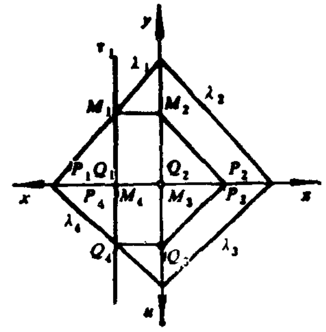


图9-19 平行于Σ_1的超平面与一般位置超平面相交

二、直线与超平面相交

图 9-20 为一般位置直线l与超平面T的交点K的作图方法。过l作垂直于xy面的超平面Λ，则$\lambda_2 \perp y$、$\lambda_4 \perp x$，求出T与Λ的交平面（$\triangle MNP$）。交平面在Σ_1中的投影为$\triangle M_2N_2P_2$及$\triangle M_3N_3P_3$。在Σ_1中过l_2作辅助面求出交点K的投影K_2、K_3，由此再求出K_1、K_4。

图 9-21 为应用平行于投影空间Σ_2的辅助超平面求交点K的作图方法。如辅助超平面与Σ_2重合，则与T的交平面的迹线即为τ_3、τ_4，l_3、l_4即为l在Σ_2中超投影的两个二维投影。由此可利用辅助平面法求出交点（I_4、I_3），再求出I_1。如另作一超平面Λ平行于Σ_2，则其交平面在组成Σ_2的投影面zu、xu上的迹线为p_3、p_4（l_3、l_4）。p_3、p_4也属于Σ_2，由此又可求出另一交点（J_3、J_4），再求出J_1。I_1、J_1的连线与l_1的交点即为所求点K的一个投影K_1，由K_1可求出K_4、K_3。

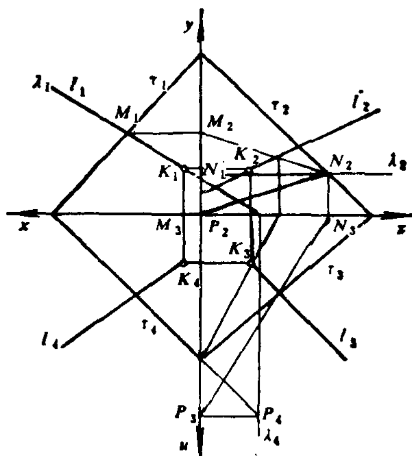


图9-20 应用垂直于投影空间的辅助超平面求作一般位置直线与超平面的交点

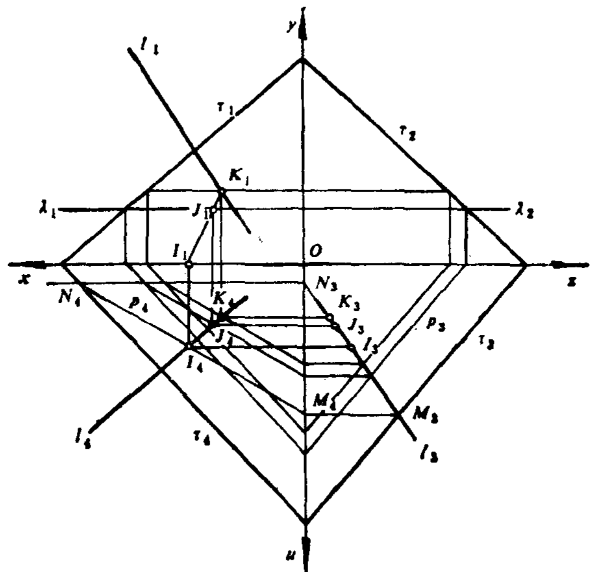


图9-21 应用平行于投影空间的辅助超平面求作一般位置直线与超平面的交点

三、在超平面内取点

如图 9-22 所示，已知超平面T内的点K的两个投影K_1、K_2，求作其他投影。可过K点作辅助超平面Λ，为方便起见，使Λ∥Σ_1，则λ_1∥y，由此可求出交平面P在Σ_1中的两迹线p_2、p_3。因K在平面P上，根据这一几何性质，即可由K_2求出K_3及K_4等。

四、两超平面平行

若两超平面平行，则其同面迹线和同空间迹面必定互相平行。

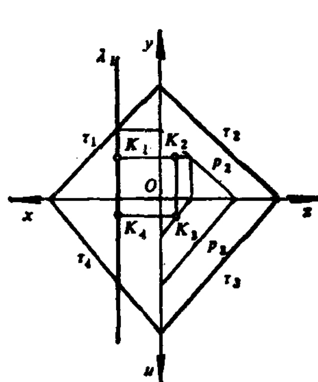


图9-22　在超平面内取点

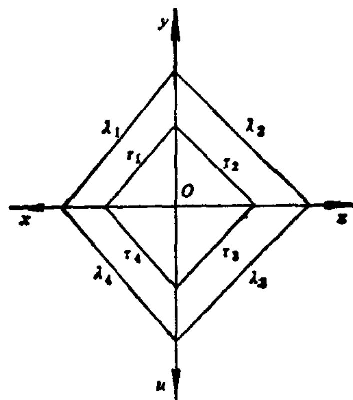


图9-23　两超平面平行

如图 9-23 所示，超平面T平行于超平面Λ，其迹线τ_1∥λ_1，τ_2∥λ_2，τ_3∥λ_3，τ_4∥λ_4等。

过一已知点K作一超平面T平行于已知超平面Λ，其作图方法为图 9-22 的逆过程，因这时T的各条迹线方向已确定，其作图步骤如图 9-24 所示。

五、直线与超平面垂直

若一直线垂直于一超平面，则必定垂直于过垂足并在超平面中的所有平面。

如图 9-25 所示，直线l垂直于超平面T，该直线必定垂直于$\tau_1\tau_2$、$\tau_2\tau_3$、$\tau_3\tau_4$、$\tau_4\tau_1$等迹面，因此l的各个投影必定垂直于其同面迹线，即$l_1\perp\tau_1$，$l_2\perp\tau_2$，$l_3\perp\tau_3$，$l_4\perp\tau_4$，其垂足即为直线与超平面的交点。

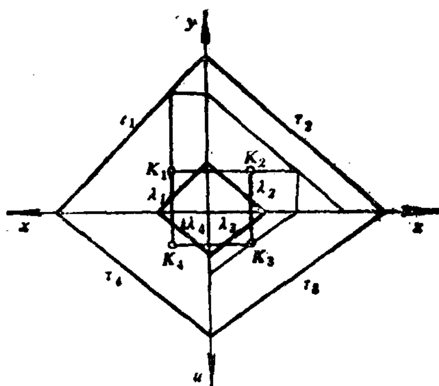


图9-24　过一点作一超平面平行于一已知超平面

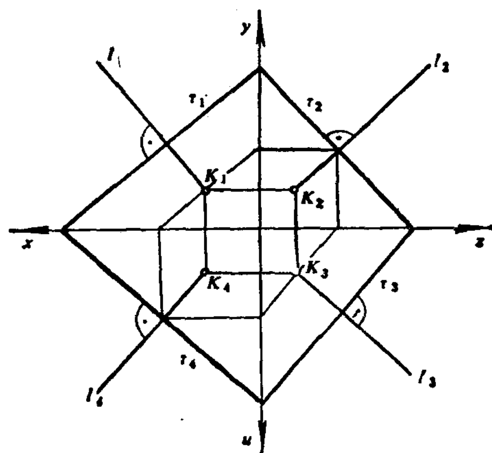


图9-25　直线与超平面垂直

第三节 投 影 变 换

一、点的变换

直角坐标体系中投影变换的基本原理与蒙若法中投影变换相似，即以新的投影空间来代替原有的投影空间，每次只能变换一个投影空间，且不能重复变换同一投影空间。

如图 9-26 所示，若变换投影空间Σ_1，则点的坐标x变为x_1，y、z、u为不变坐标（见图左上角）；若变换投影空间Σ_3，则坐标z变为z_1，x、y、u为不变坐标（见图右上角）；若变换投影空间Σ_4，则坐标u变为u_1，x、y、z为不变坐标（见图左下角）。

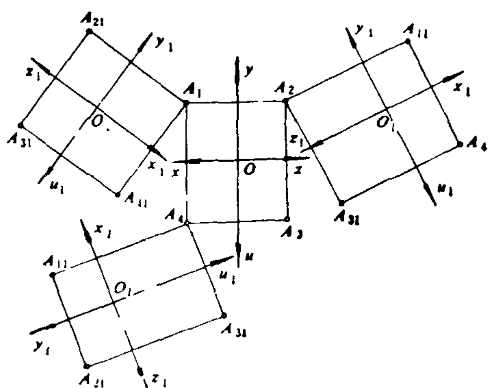


图9-26　点的投影变换

二、直线的变换

如图 9-27 所示，AB为一般位置直线。第一次变换将投影空间Σ_3变为Σ_{31}，使

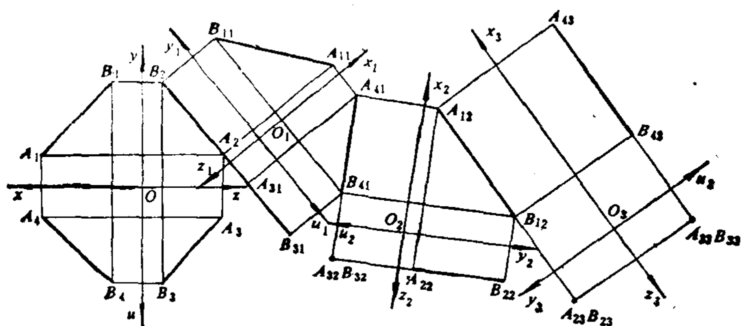


图9-27　直线的投影变换

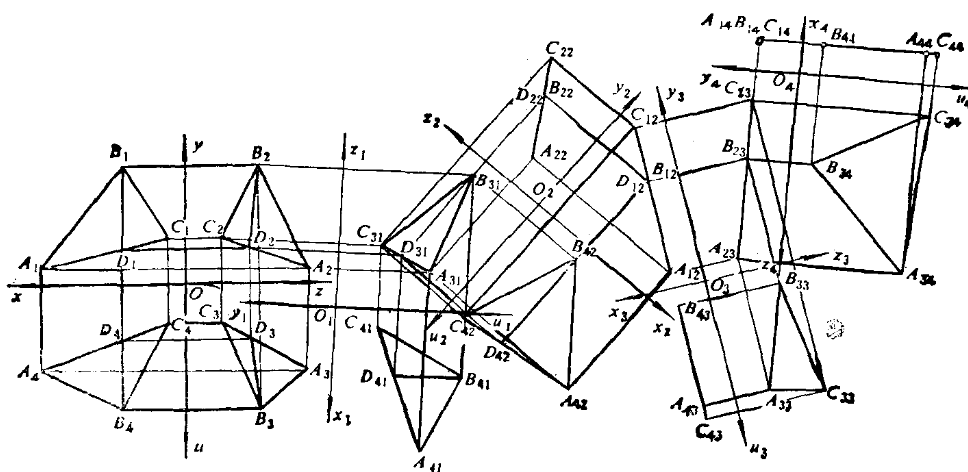


图9-28　平面的投影变换

$y_1 /\!/ A_2B_2$。显然，$u_1 /\!/ A_3B_3$，即 AB 与 Σ_{31} 等距，AB 为空平行线。第二次变换，将投影空间Σ_4变为Σ_{42}，使 $x_2 /\!/ A_{41}B_{41}$。显然，$A_{32}B_{32}$ 重影为一点，AB 与 x_2y_2投影面 x_2y_2 平行，其投影 $A_{12}B_{12}$反映 AB 的实长。第三次变换，将投影空间 Σ_2 变为Σ_{23}，使 $x_3 /\!/ A_{12}B_{12}$，这时$A_{23}B_{23}$、$A_{33}B_{33}$均重影为一点，AB 与x_3 平行。

三、平面的变换

如图 9-28 所示，△ABC 为一般位置平面，为使平面垂直于某一投影空间，必须变换平面上一直线，使其垂直于某一投影空间，也即平行于相应的投影轴。为此先在平面上作一空平行线，如图所示为平行于 Σ_1 的直线 BD，这时 $B_1D_1 /\!/ y$，$B_4D_4 /\!/ u$。经过二次变换后，BD 成为轴平行线，这时平面在 O_2 体系中成为空垂直面。再变换二次，则成使平面 ABC 为平行于 z_4u_4，其投影 $A_{24}B_{24}C_{24}$ 反映△ABC 的实形。

四、超平面的变换

如图 9-29所示，T为一般位置超平面。取 $y_1 \perp \tau_2$，则 τ_1 变换为 τ_{11}，τ_4 变换为 τ_{41}，其中使 $O_1\tau_{x1} = O\tau_x$，这时超平面与 Σ_3 变换后的空间 Σ_{31} 垂直。再作 $x_2 \perp \tau_{41}$，使 $O_2\tau_{y_2} = O_1\tau_{y_1}$，作出 τ_{y_2}，τ_{y_2} 与 τ_{x_2} 的连线 τ_{12} 即为T在投影面 x_2y_2 上的迹线，这时超平面T垂直于包含 x_2y_2 的投影空间 Σ_{21} 和 Σ_{42}，τ_{12} 具有重影性。如再变换一次，则T为平行于Σ_1 的超平面。

如图 9-30 所示，为了求点 A 到超平面T的距离，作图时先变换超平面T，使其垂直于坐标面 y_1z_1，然后从 A_{21} 作 τ_{21} 的垂线，其垂足为 K_{21}，则 $A_{21}K_{21}$ 即为所求距离的实长

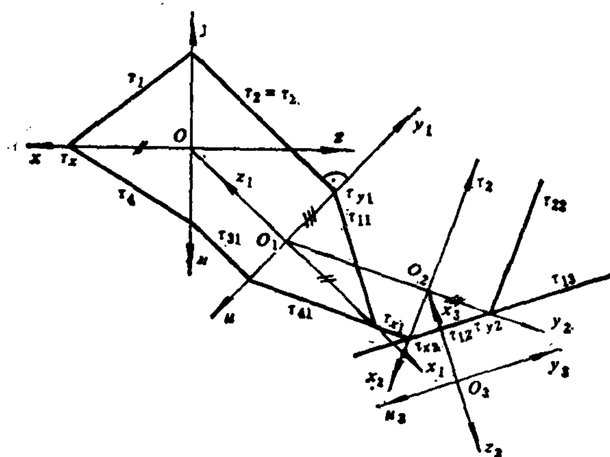


图9-29 超平面的投影变换

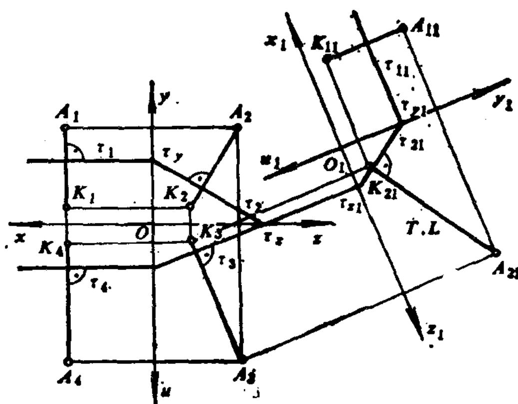


图9-30 求点到超平面的距离

第四节 依卡哈脱方法

1929 年 L.依卡哈脱（Eckhart）在“四维空间”一书中提出应用直角坐标体系来表示四维空间的几何元素及其相对位置与图解某些度量问题[12]。

一、点的图示法

依卡哈脱提出的直角坐标体系的形式如图 9-31 所示，其坐标轴为 x、y、z、t。x 与 z 在一直线上称为 X 向，y 与 t 在另一直线上称为 Y 向。如已知点 P 的坐标为 x_p、y_p、z_p、t_p。点 P 分别用两个图象表示，第一图象 P' 由坐标 x_p、y_p 确定，第二图象 P'' 由坐标

z_P、t_P确定，这两个图象是彼此完全独立的。由坐标y_P、z_P决定的图象$\bar{P}$称为辅助图象，$\bar{P}$可由P'、P''作出。

二、直线的图示法

设直线g由两点P_1、P_2确定，分别作出P_1、P_2的投影P_1'、P_1''、P_2'、P_2''，其同面投影的连线g'、g''即为g的相应图象。如图9-32所示，以$P_1'P_2'$和$P_1''P_2''$为两直角边，作出一直角三角形，其斜边即为线段P_1P_2的实长。因为

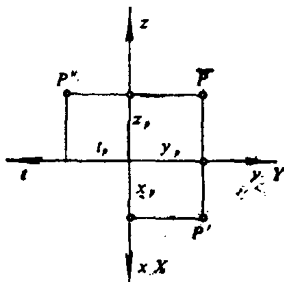


图9-31　点的图示法

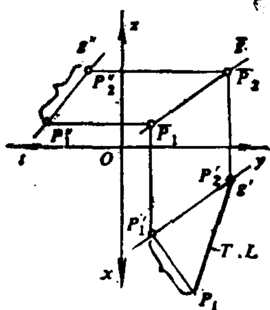


图9-32　直线的图示法

$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_1'P_2'}^2+\overline{P_1''P_2''}^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(t_1-t_2)^2}$$

式中，(x_1、y_1、z_1、t_1)、(x_2、y_2、z_2、t_2)为P_1、P_2的坐标值。

三、平面的图示法

平面由不在一直线上的三点所确定。因此，分别作出三点的第一图象与第二图象，然后分别连接之，即得平面的第一图象与第二图象（图9-33）。

如图9-34所示，一平面垂直于投影面xy，即为单面半平行面或半垂直面，它在xy面上的投影为一直线，以Σ'表示。如图9-35所示，一平面同时垂直于投影面xy和zt，即为双面半垂直面或半平行面，其投影分别以Σ'、Σ''表示，Σ'、Σ''的方程为

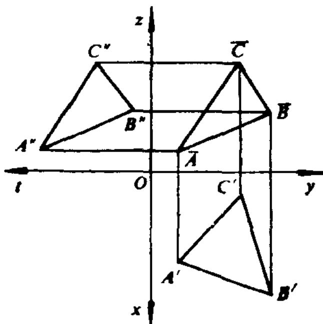


图9-33　一般位置平面的图示法

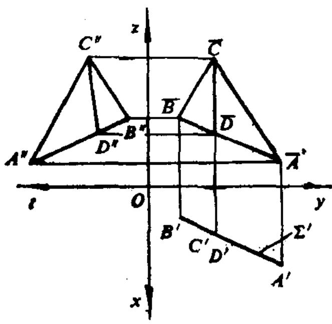


图9-34　垂直于投影面xy的平面的图示法

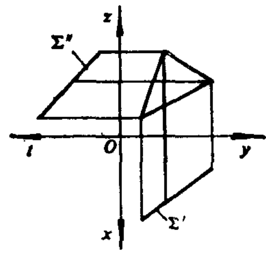


图9-35　同时垂直于投影面xy和zu的平面的图示法

$$\Sigma':\quad px+qy+r=0$$

$$\Sigma'':\quad p_1z+q_1t+r_1=0$$

四、超平面的图示法

超平面的图示法也可以用迹线或非迹线来表示。图9-36为超平面T的迹线图示法。超平面在投影面xy、yz、zt上的迹线分别以d_1、d_2、d_3表示。

若超平面的方程为

$$ax+by+cz+dt+e=0$$

则迹线 d_1、d_2、d_3 的方程分别为

$$d_1:\quad ax+by+e=0$$

$$d_2:\quad by+cz+e=0$$

$$d_3:\quad cz+dt+e=0$$

图 9-36 中，P 为超平面中的一点，过 P'、P'' 分别引 d_1、d_3 的平行线 v'、v''，v'、v'' 的交点为 $R'(R'')$。由此可见，不同的点可引出不同的射线 v'、v''，但它们的交点均在一条直线 δ 上。δ 称为超平面轴，它表示 T 与两重平面的交线。

由于 v' 上任一点图象在 v'' 上可有无数个点图象，即有 ∞^2 个点，它们的投影都落在相应的 v'、v'' 上，即处于由 v'、v'' 决定的平面上。其方程为：

$$v':\quad ax+by+f=0$$

$$v'':\quad cz+dt+(e-f)=0$$

同理可画出 ∞^1 条 v' 平行于 d_1，因此有 ∞^1 个平面处在超平面 T 中。

在 δ 上任一点的坐标为 $z=-x$，$t=-y$，代入超平面 T 的方程，即得 δ 的方程如下：

$$(a-c)x+(b-d)y+e=0$$

由上述分析可知，若已知超平面的轴 δ 及一组射线 v'、v''，也可确定该超平面。

如图 9-37 所示，已知一超平面由 δ 及 v'、v'' 确定，另有一点 $P(P'$、$P'')$，求 P 到超平面 T 的最短距离。作图时可过 P'、P'' 分别作 v'、v'' 的垂线，得交点 Q'、Q''，则 Q 在超平面 T 上，同理，在 T 上另取一组射线，得交点 R，连接 Q、R 得直线 g，从 P 作 g 的垂线，得垂足 S，则 PS 即为 P 到 T 的最短距离 d。

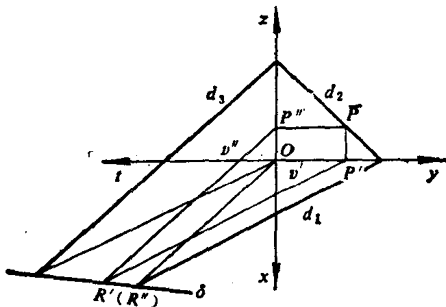


图9-36　超平面的图示法

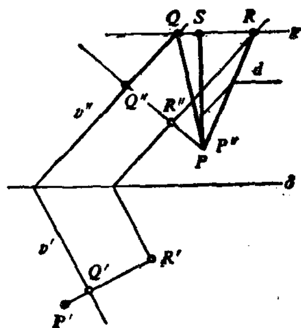


图9-37　求点 P 到超平面 T 的最短距离

第十章　多层坐标面体系中的多维画法几何学

多层坐标面体系的多维画法几何学，其方法是根据维数 n 将 $n-1$ 个坐标面（投影面）按纵向或横向进行排列，以此图示描述多维空间几何元素及其相对位置。下面主要论述纵向排列的多层坐标面体系。

第一节　几何元素的图示法

纵向排列多层坐标面体系如图 10-1 所示。各坐标面都以纵线分段作为坐标轴 x_1、x_2、x_3，以水平横线作为坐标轴 x_4，并组成 x_1x_4、x_2x_4、x_3x_4 等坐标面。如图 10-2 所示，x_2x_4、x_3x_4 两坐标面，x_4 是公共轴，此时 x_3 指向朝下，原最下面的 x_4 轴可以省略，这是较常用的一种形式。

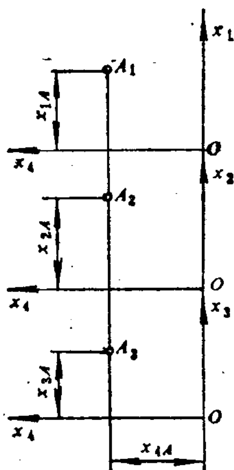


图10-1　纵向多层坐标面体系形式之一

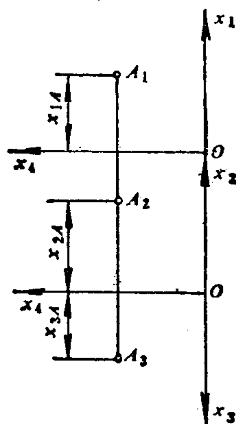


图10-2　纵向多层坐标面体系形式之二

一、点的图示法

在四维空间中的任一点都有四个坐标值（x_1、x_2、x_3、x_4），并且，可以作出三个二维投影图。显然，在 n 维空间中的任一点可以由 $n-1$ 个二维投影来表示。图 10-3 为一般位置的点 A 的投影图。A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 分别为 A 在 x_1x_4、x_2x_4、x_3x_4、x_1x_2、x_1x_3、x_2x_3 坐标面（投影面）上的投影。

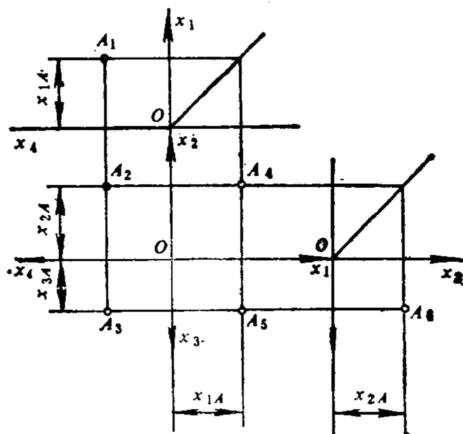


图10-3　点的六面投影图

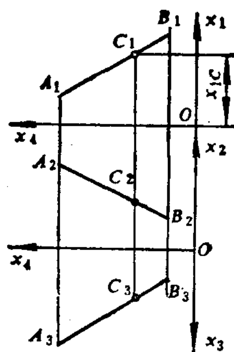


图10-4　一般位置直线的投影图

二、直线的图示法

如图 10-4 所示，连接直线上 A、B 两点的各组同面投影，即得直线 AB 的各个投影。若点 C 在 AB 上，则 C 的各个投影在 AB 的各个同面投影上。如已知点 C 的坐标 x_{1C}，即可确定 C 在直线 AB 上的投影位置。

如图 10-5 所示，四维空间中垂直于子空间 $O-x_1x_2x_4$ 的直线 AB 的各个投影，在坐标面 x_1x_4、x_2x_4 上的投影为一点；在坐标面 x_3x_4 上的投影平行于 x_3 轴，且反映直线线段的实长。

如图 10-6 所示，四维空间中平行于坐标面 x_3x_4 的直线 AB 的各个投影，在坐标面 x_1x_4、x_2x_4 上的投影平行于 x_4 轴；在坐标面 x_3x_4 上的投影反映实长。

三、平面的图示法

如图 10-7 所示为平面△ABC 在四维空间中各个坐标面上的投影，△ABC 由三点 A、B、C 所确定。如已知点 K 在△ABC 上，且已知其中一个投影，则可由辅助线 CD 作出 K 的其他投影。图 10-8 为垂直于 x_1x_4 的平面△ABC 的投影图。图 10-9为垂直于子空间 $O-x_1x_2x_4$ 的平面△ABC 的投影图。

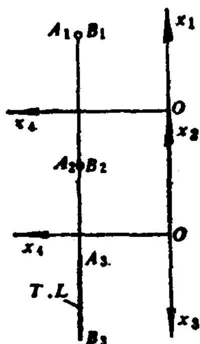


图10-5　垂直于子空间$O-x_1x_2x_4$的直线投影图

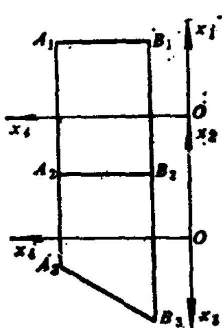


图10-6　平行于坐标面x_3x_4的直线投影图

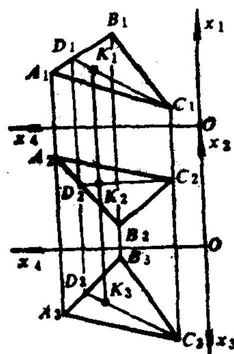


图10-7　一般位置平面的投影图

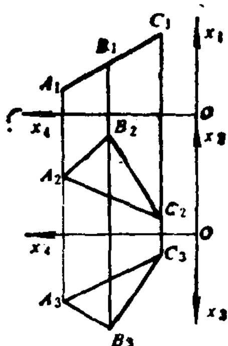


图10-8　垂直于x_1x_4的平面的投影图

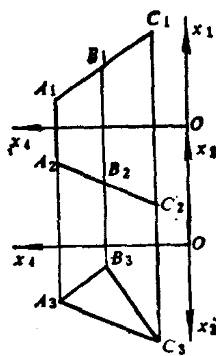


图10-9　垂直于子空间$O-x_1x_2x_4$的平面的投影图

四、超平面的图示法

如图 10-10 所示为一般位置超平面 T 的投影图，T 由迹线表示，T 在坐标面 x_1x_4、x_2x_4、

x_3x_4 上的迹线分别为 τ_1、τ_2、τ_3。图 10-11 为平行于子空间 $O-x_2x_3x_4$ 的超平面T的投影图。其迹线 $\tau_1 /\!/ x_4$。

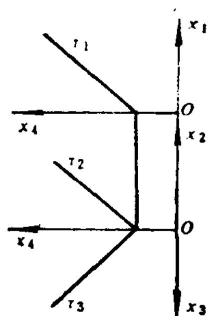


图10-10　一般位置超平面的投影图（迹线表示法）

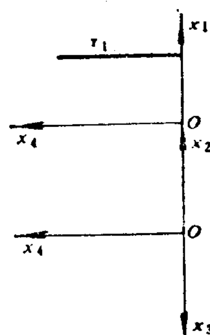


图10-11　平行于子空间 $O-x_2x_3x_4$ 的超平面的投影图（迹线表示法）

第二节　几何元素间的相对位置

一、平面与超平面相交

图 10-12 为垂直于坐标面 x_1x_4 的超平面T与平面 ABC 的交线 DE 的作图方法。由于 τ_1 具有重影性，因此，交线在 x_1x_4 上的投影 D_1E_1 与 τ_1 重合。由 D_1E_1 再求出交线的另外两个投影 D_2E_2、D_3E_3。

二、两超平面相交

如图 10-13 所示，超平面 $ABCD$ 被垂直于坐标面 x_1x_4 的超平面T所截交，其交平面△123 在坐标面 x_1x_4 上的投影 $1_12_13_1$ 与 τ_1 重合。由此可求出其他的二个投影△$1_22_23_2$、△$1_32_33_3$。

如图 10-14 所示，以迹线表示的一般位置超平面T与垂直于坐标面 x_1x_4 的超平面Λ相交，其交平面△123 在 x_1x_4 上的投影 $1_12_13_1$ 与 λ_1 重合。由于 τ_1 与 λ_1 均在坐标面 x_1x_4 上，因此公有点 1 即为 τ_1 与 λ_1 的交点，投影 1_1 与之重合。同理，可求出 2、3 点的投影 2_2、3_3。根据 1_1、2_2、3_3 再求出各点的其他投影。

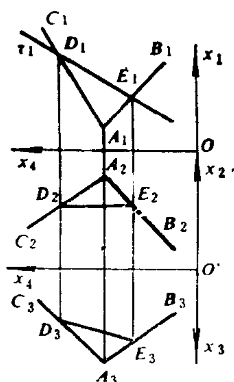


图10-12　平面与超平面相交

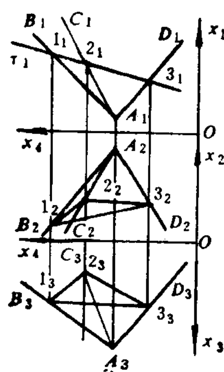


图10-13　两超平面相交

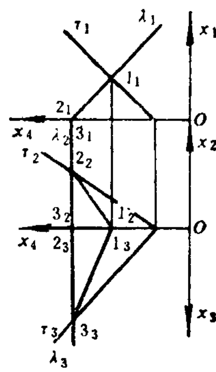


图10-14　以迹线表示的两超平面（其中之一垂直于 x_1x_4）相交

如图 10-15 所示，平行于 $O-x_2x_3x_4$ 的超平面 Λ 与一般位置超平面 T 相交，其交平面 123 在 x_1x_4 面上的投影 $1_12_13_1$ 与 λ_1 重合，显然 $1_22_2 /\!/ \tau_2$，$1_33_3 /\!/ \tau_3$。

如图 10-16 所示，一般位置超平面 T、Λ 相交，其交平面 123 的点 1 在 x_1x_4 上，即为 τ_1 与 λ_1 的交点；点 2 在 x_2x_4 上，即为 τ_2、λ_2 的交点；点 3 在 x_3x_4 上，即为 τ_3、λ_3 的交点。

三、直线与超平面相交

如图 10-17 所示，直线 m 与超平面 T 相交。过 m 作辅助超平面 Λ，求出 Λ 与 T 的交平面，直线 m 与交平面的交点 K 即为 m 与 T 的交点。

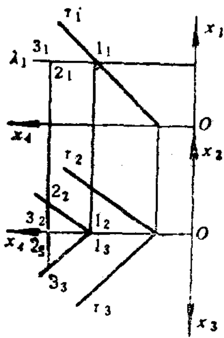


图10-15 以迹线表示的两超平面（其中之一平行于$O-x_2x_3x_4$）相交

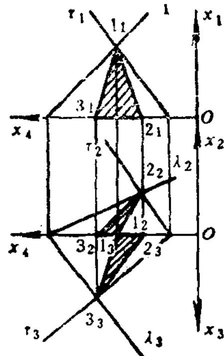


图10-16 一般位置的两个超平面相交

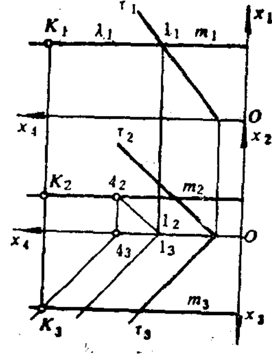


图10-17 直线与超平面相交

四、两超平面平行

如图 10-18 所示，若两超平面 T、Λ 平行，则两超平面的同面迹线必定互相平行，即 $\tau_1 /\!/ \lambda_1$，$\tau_2 /\!/ \lambda_2$，$\tau_3 /\!/ \lambda_3$。

五、直线与超平面垂直

如图 10-19所示，若直线 m 与超平面 T 垂直，则 m 的各个投影必定垂直于 T 的各同面迹线。即 $m_1 \perp \tau_1$，$m_2 \perp \tau_2$，$m_3 \perp \tau_3$。

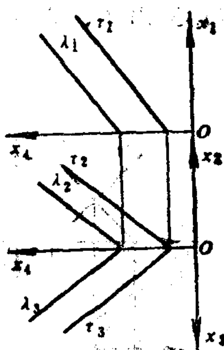


图10-18 两超平面平行

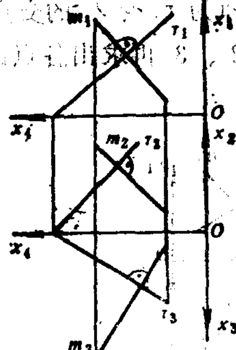


图10-19 直线与超平面垂直

第三节 投 影 变 换

多层坐标面体系中投影变换的基本原理与蒙若法、直角坐标体系均相同，但在作图方法

上有所不同。

一、点的投影变换

如图 10-20 所示，已知点 A 的投影 A_1、A_2、A_3。如变换坐标 x_{3A}，即以 x_{31}、x_{11}、x_{21} 依次代替 x_3、x_1、x_2，则 x_{3A} 变换为 x_{31A}，而 x_{1A}、x_{2A} 不改变；如要求改变坐标 x_{1A} 或 x_{2A} 时，也可依上述方法进行变换。

二、直线的投影变换

如图 10-21 所示，已知一般位置直线 AB，作 x_{41} 平行于 A_3B_3，即 $AB \parallel O-x_1x_2x_4$，也即直线 AB 变换为空平行线。如继续进行变换，作 x_{42} 平行于 $A_{21}B_{21}$，即 AB 平行于 x_1x_4（$x_{12}x_{42}$），因此在该面上的投影 $A_{12}B_{12}$ 反映线段 AB 的实长。

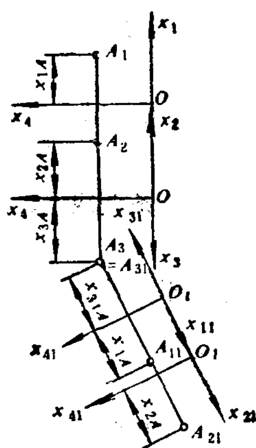


图10-20 点的投影变换

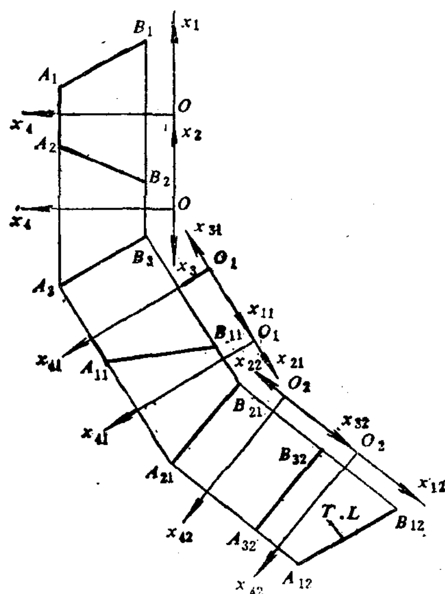


图10-21 直线的投影变换

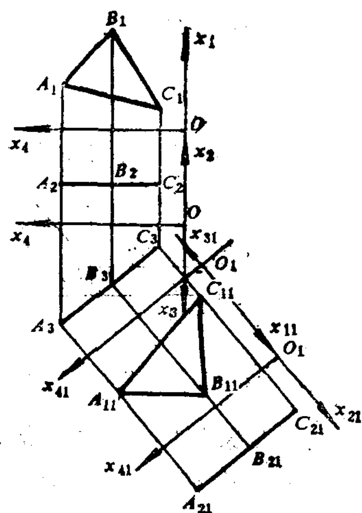


图10-22 平面的投影变换

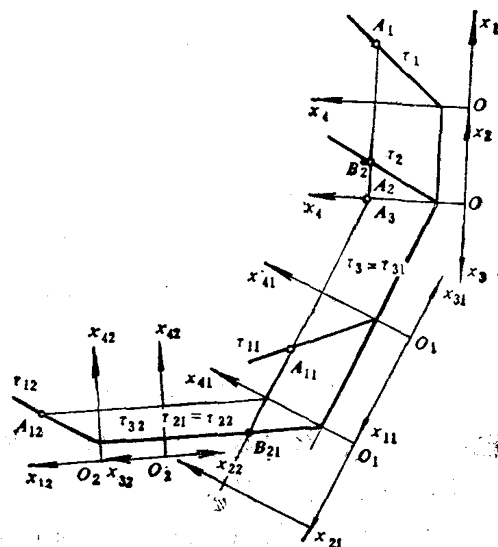


图10-23 超平面的投影变换

三、平面的投影变换

图 10-22 为平行于 $O-x_1x_3x_4$ 且垂直于 $O-x_1x_2x_4$ 的平面$\triangle ABC$ 的投影图。作 x_{41} 平行于 $A_3B_3C_3$，即经过一次变换$\triangle ABC$ 变为平行于坐标面 $x_1x_4(x_{11}x_{14})$ 的平面，在该面上的投影 $A_{11}B_{11}C_{11}$ 反映$\triangle ABC$ 的实形。

四、超平面的投影变换

如图 10-23 所示，一般位置超平面T的迹线为 τ_1、τ_2、τ_3。作 x_{41} 垂直于 τ_3，经过一次变换后，迹线分别为 τ_{11}、τ_{21}，$\tau_3=\tau_{31}$，即超平面垂直于 $O-x_1x_2x_4$；再作 x_{42} 垂直于 τ_{21}，经过第二次变换后，迹线分别为 τ_{12}、$\tau_{21}=\tau_{22}$、τ_{32}，即超平面垂直于 x_1x_4（$x_{12}x_{42}$），τ_{12} 具有重影性。

第四节　孔　斯　方　法

S.A.孔斯（Coons）在 1954 年提出了横向排列的多层坐标面体系[13]，其中，几何元素的图示法与纵向排列相同，仅在其图示形式上有所不同。

图 10-24 为横向排列的多层坐标面体系的形式及点 A 的投影图。图中以水平横线作为公共坐标值 x_1 的起点，以若干纵线分别作为坐标值 x_2、x_3、x_4 的起点，A 点各投影 A_1、A_2、A_3 的坐标值 x_{1A} 均相等，因此 A_1、A_2、A_3 在平行于 $x_1=0$ 的一条直线上，再由 x_{2A}、x_{3A}、x_{4A} 即可确定其各投影的位置。

图 10-25 为直线 AB 的投影图。图 10-26 为垂直于 $O-x_1x_3x_4$ 的平面$\triangle ABC$ 的投影图。图 10-27 为一般位置超平面的迹线表示法。

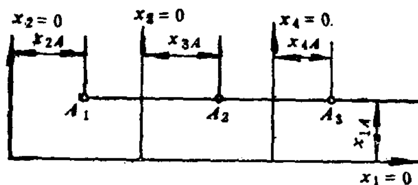


图10-24　点的投影图

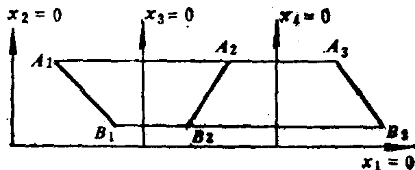


图10-25　直线的投影图

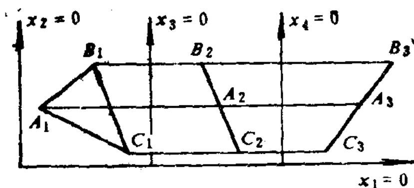


图10-26　平面的投影图

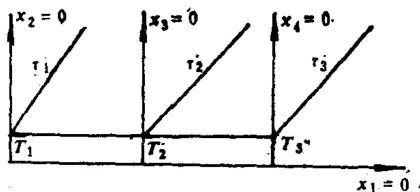


图10-27　超平面的投影图（迹线表示法）

综上所述，多层坐标面体系与蒙若体系类似，所不同的是蒙若体系中各投影面的公共坐标轴均重合在一起，即作图时在 x_2x_4、x_3x_4 面上的投影往往叠合在一起，影响图形的清晰度，而多层坐标面体系的各个投影面都可分开，提高了图形的清晰度，但投影图的幅面较大。

第十一章　平行向量体系中的四维画法几何学

E.C. 费特洛夫（Федоров）在有关的论文㊀㊁中提出，在平面上用有向线段（或向量）来表示四维空间中的点。以后一些学者在此基础上完善了这种方法[15]，系统地提出了用平行向量法来论述四维画法几何学中的问题。

第一节　几何元素的图示法

一、点的图示法

若已知四维空间中点 A 的坐标 x_{1A}、x_{2A}、x_{3A}、x_{4A}，为了使 A 的坐标与图象之间在图形平面上成单值对应，在图形平面上取坐标体系 $O-x_1x_2x_3x_4$。其中，$O-x_1x_2$ 为直角坐标体系，轴 x_3 与轴 x_4 在一直线上，其指向相反，且与轴 x_1（x_2）成一定角度。为简单起见，度量坐标值通常取为等测。

如图 11-1 所示，以点 A 的坐标值 x_{1A}、x_{2A} 在图形平面上定出点 A 的一个图象 A_{12}，其余两个坐标 x_{3A}、x_{4A} 由相应的线段长度 $A_{12}A_3$ 和 $A_{12}A_4$ 确定。$A_{12}A_3$、$A_{12}A_4$ 的指向分别与 x_3、x_4 的指向相同。A_3、A_4 即为点 A 的另两个图象。

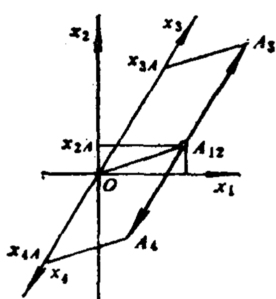


图11-1　平行向量法的坐标系统与点的图示法

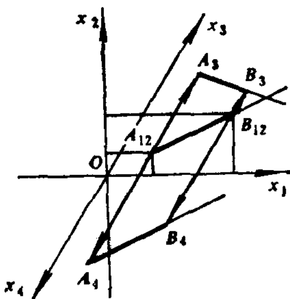


图11-2　直线的图示法

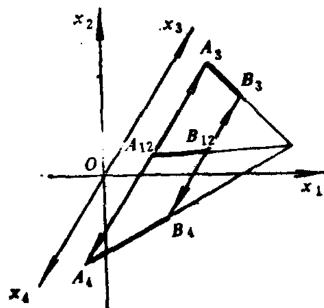


图11-3　与图形平面相交的直线的图示法

二、直线的图示法

设四维空间中直线 AB 由其上两点 A（x_{1A}、x_{2A}、x_{3A}、x_{4A}）和 B（x_{1B}、x_{2B}、x_{3B}、x_{4B}）所确定（图 11-2）。首先，分别作出 A、B 点的各个图象 A_{12}、A_3、A_4 和 B_{12}、B_3、B_4，然后连接同面图象，即得直线 AB 的各个图象。由此可知，A_3A_4、B_3B_4 是平行的。在一般情况下，$A_{12}B_{12}$、A_3B_3、A_4B_4 三条直线不相交；如三条直线交于一点（图 11-3），则说明直线 AB 与图形平面有交点，即属于同一超平面，该交点即为 AB 在图形平面上的迹点。

由此可见，A_3A_4 的方向即为轴 x_3 或 x_4 的方向，因此图示几何元素时，其坐标轴通常可

㊀ Е. С. Фёдоров Точное изображение точек пространства на проскости, записки горного института, 1907, Т. I. Вып. 1.

㊁ Е. С. Фёдоров Навая начертательная геометрия, известия Российской АН, 1917, VI сер., Т. XI.

以省略。

三、平面的图示法

在四维空间中，平面的图示可先分别作出确定平面的几何元素的各个图象，再分别连接它们，即得平面的各个图象。

如图 11-4 所示，一平面用三个图形$\triangle A_{12}B_{12}C_{12}$、$\triangle A_3B_3C_3$、$\triangle A_4B_4C_4$来表示，这三个三角形两两呈透视仿射对应，因此有三条对应轴r_{123}、r_{124}、r_{34}，它们通过同一个点 R，该点即为$\triangle ABC$与图形平面的交点，称为平面$\triangle ABC$在图形平面上的迹点。

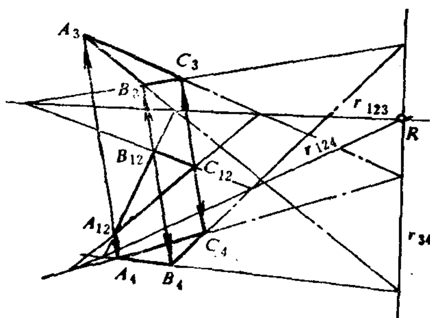


图11-4　平面的图示法

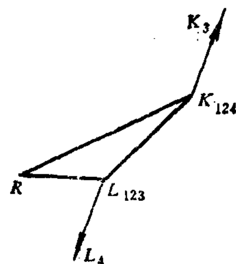


图11-5　用迹点给定的平面的图示法

设平面 RLK，点R的$x_{3R}=x_{4R}=0$，即R_{12}、R_3、R_4重合为一点R_{1234}，一般以R表示；点K的$x_{4K}=0$，即K_4与K_{12}重合，以K_{124}表示；点L的$x_{3L}=0$，即L_3与L_{12}重合，以L_{123}表示。以上述方式给定的平面即为迹点给定的平面（图 11-5）。

四、超平面的图示法

在四维空间中，超平面的图示可先分别作出确定超平面的各个几何元素，再分别连接它们，即得超平面的各个图象。

如图 11-6 所示，超平面 $ABCD$ 用图象 $A_{12}B_{12}C_{12}D_{12}$、$A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4$ 表示。该四面体有四个三角形，每三个三角形有一个迹点，即有四个迹点，并且必定都在一直线上。此直线即为超平面与图形平面的交线，称为超平面在图形平面上的迹线。

如图 11-7 a 所示，超平面 T 是由分别位于各投影轴上的点 T_1、T_2、T_3、T_4 所确定，这些点的连线 τ_1、τ_2、τ_3、τ_4、τ_5、τ_6 即为 T 在相应坐标面上的迹线。通常以交于迹点T_1的三条迹线 τ_1、τ_4、τ_5 来表示超平面 T（图 11-7 b）。

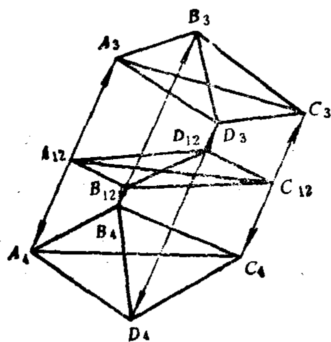


图11-6　超平面的图示法

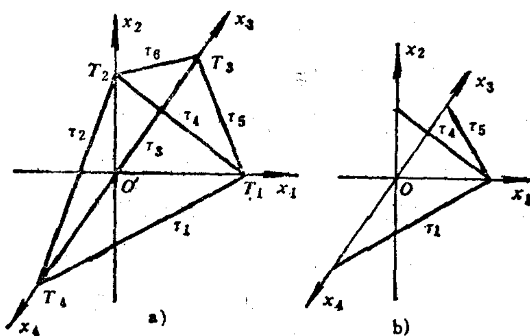


图11-7　超平面的图示法（用迹线表示）

第二节　几何元素间的相对位置

一、点在直线上

若点C在直线AB上，则点C的各个图象C_{12}、C_3、C_4在直线AB的各个同面图象$A_{12}B_{12}$、A_3B_3、A_4B_4上（图 11-8）。

二、点在平面上

如图 11-9 所示，点K在△ABC上，已知K_{12}，欲作出K_3、K_4，可过K作辅助线AD，则K_3、K_4分别在A_3D_3、A_4D_4上。

图 11-10 为平面用迹点表示时，作平面上点F的方法。

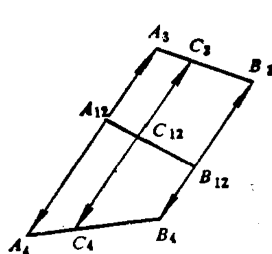


图11-8　点在直线上

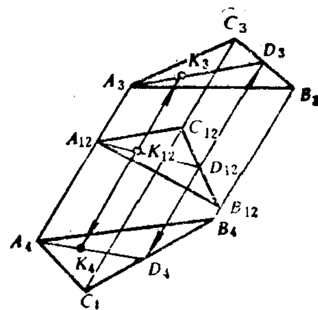


图11-9　点在平面上

三、直线和平面、平面和平面在同一超平面内的条件

如图 11-11 所示，已知直线l与平面△ABC（以迹点表示）。欲确定两者是否在同一超平面内，必需判别两者是否有交点，如有交点，则处在同一超平面内；如无交点，则不在同一超平面内。过直线l作辅助超平面T（在x_1x_2面上的迹线为τ_{12}），求出△ABC与T的交线DE，D_3E_3与l_3的交点为F_3，D_4E_4与l_4的交点为F_4。若连线F_3F_4为平行线段，则说明点F是l与△ABC的交点，即l与△ABC在同一超平面内。

欲确定两平面是否在同一超平面内，必须判别两平面是否有交线，如有交线，则在同一超平面内；反之，则不在同一超平面内。

四、超平面内的点

如图 11-12 所示，已知点K在超平面T（由平面△ABC和面外一点D决定）内，根据已知图象K_{12}、K_3求另一图象K_4。过K作辅助超平面Λ（在x_1x_2面上的迹线为λ_{12}），求出与△ABC的交线EF，E_3F_3与D_3K_3的交点G_3，过G_3作A_3A_4的平行线与E_4F_4交于G_4，则K_4必定在D_4G_4的连线上。

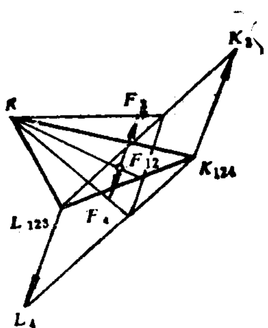


图11-10　用迹点表示平面上的点的作图法

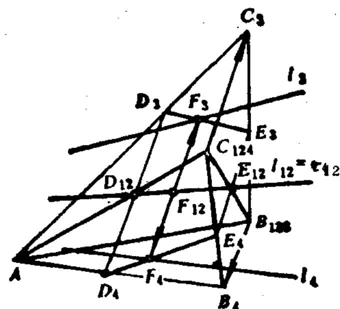


图11-11　判别直线与平面有无交点的作图法

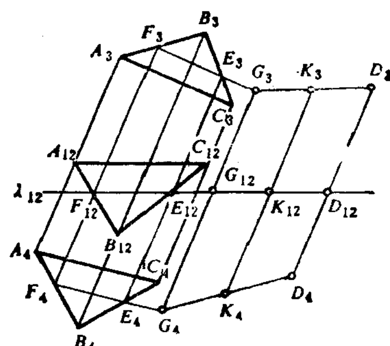


图11-12　点在超平面内的作图

五、直线与超平面相交

如图 11-13 所示，已知直线 m 与超平面 $ABCD$，求其交点，有下列两种方法：

（1）过 m 作超平面T，求出T与 $ABCD$ 的交平面 $EFGH$，由于 m 与 EF、GH 处于同一超平面T内，即可求出其交点 K。K 即为 m 与 $ABCD$ 的交点（图 11-13)。

（2）在超平面 $ABCD$ 上任取一点，如 D，D、m 决定一平面 α，α 与属于超平面内的平面（如△ABC）的交点为 I，直线 DI 必定在 α 面上，并与 m 相交，其交点为 K。K 在 m 上，又在超平面 $ABCD$ 上，即为所求的交点。

六、两超平面相交

如图 11-14 所示，已知超平面T、Λ，分别以 τ_1、τ_4、τ_5 和 λ_1、λ_4、λ_5 表示，求其交平面。

τ_4、λ_4 的交点 A 即为交平面 ABC 在图形平面上的迹点，即 $x_{8A}=x_{4A}=0$。τ_5、λ_5 的交点 B_3 为交平面 ABC 在 x_1x_8 面上的迹点，因 $x_{2B}=x_{4B}=0$，即 B_{124} 在轴 x_1 上。τ_1、λ_1 的交点 C_4 为交平面在 x_1x_4 面上的交点，因 $x_{2C}=x_{3C}=0$，即 C_{123} 也在 x_1 轴上。

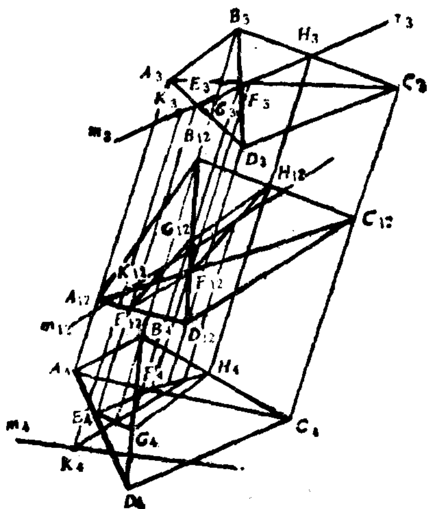


图11-13 直线与超平面相交

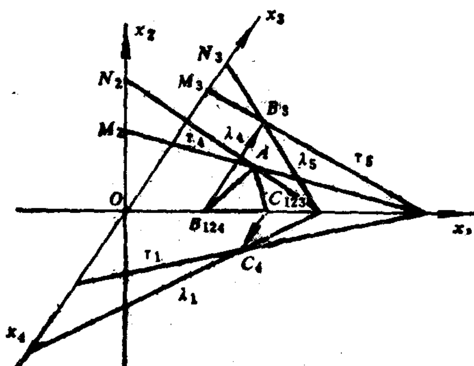


图11-14 两超平面相交

第三节 费里波夫方法

费里波夫（Филиппов）方法[15]是用平行向量法来表示多维空间几何元素。

一、点的图示法

三维空间点 A_1 的两面投影，如图 11-15 a 所示，为了表示第四维，需增加轴 t。在图形平面上取 t 与轴 y 在一直线上，点 A 在轴 t 上的坐标值用向量表示。向量的始点为三维空间的点 A_1，终点为 A_2，方向沿轴 t。向量的水平投影为 $\overrightarrow{A_1A_2}$，其正面投影与 A_1' 重合，以 A_{12}' 表示。因此，在四维空间中，点 A 用 A_1、A_2、A_{12}' 三个投影表示。

图 11-16 为六维空间中点的图示法。在四维坐标体系上增加轴 u 与轴 v，分别与轴 z 与轴 x 重合。除原有 A_1、A_2、A_{12}' 外，由坐标 u_A、v_A 分别从 A_{12}' 出发，作出向量 $A_{12}'A_3'$ 和

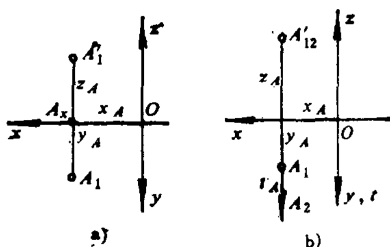


图11-15 四维空间点的图示法

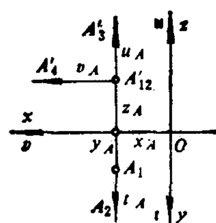


图11-16 六维空间点的图示法

$A'_{12}A'_4$，其长度分别表示 u_A、v_A 的坐标值。这样，用五个投影 A_1、A_2、A'_{12}、A'_3、A'_4 即可表示一个六维空间的点 A。A_1 称为空间点 A 的水平投影；A_2 为水平向量投影；A'_{12} 为正面投影；A'_3 为第一正面向量投影；A'_4 为第二正面向量投影。

二、直线的图示法

直线的图示法分别由直线上两点的图象确定。

图 11-17、图 11-18 分别为四维空间和六维空间中直线 AB 的图示法。

图 11-19 为平行于投影空间 $O-xyz$ 的直线的图示法，因 $A_1A_2=B_1B_2$，即 $t_A=t_B$。

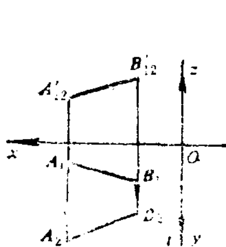


图11-17 四维空间中直线的图示法

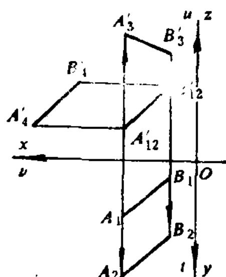


图11-18 六维空间中直线的图示法

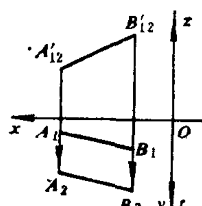


图11-19 平行于$O-xyz$的直线的图示法

图 11-20 为平行于坐标面 xz 的直线 CD 的图示法，这时 $y_C=y_D$，$t_C=t_D$。

图 11-21 为平行于坐标面 yt 的直线 EF 的图示法，这时 $x_E=x_F$，$z_E=z_F$。

三、平面的图示法

平面的图示法由决定平面的几何元素的图象确定。

图 11-22 为处于一般位置的平面△ABC的图示法。图 11-23 为垂直于投影空间 $O-xyz$ 的平面△DEF 的图示法。这时 EF 垂直于 $O-xyz$。图 11-24 为平行于投影空间 $O-xzt$ 的平面△ABC 的图示法，这时 $y_A=y_B=y_C$。

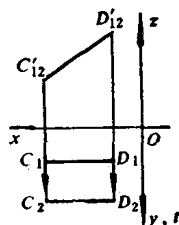


图11-20 平行于xz的直线的图示法

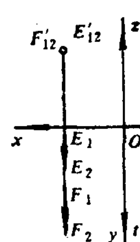


图11-21 平行于yt的直线的图示法

四、超平面的图示法

图 11-25 为一般位置超平面$ABCD$的图示法。

图 11-26 为超平面 T 的图示法（迹线表示法），通常以交于迹点 T_x 的三个迹线 τ_1、τ_4、τ_5 来表示。显然，也可求出其他迹线（τ_3、τ_6），τ_2 迹线为 T_y、T_t 的连线。

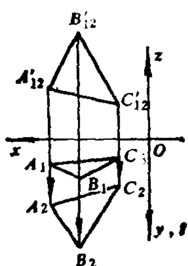


图11-22 一般位置平面的图示法

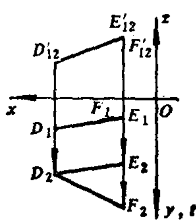


图11-23 垂直于O-xyz的平面的图示法

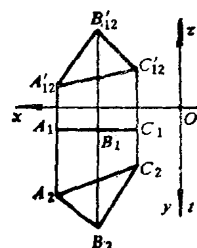


图11-24 平行于O-xzt的平面的图示法

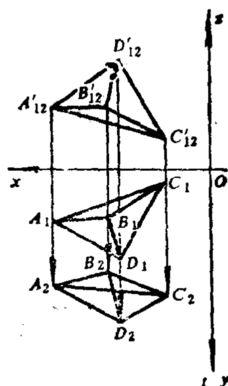


图11-25 一般位置超平面的图示法

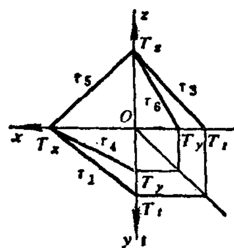


图11-26 超平面的迹线图示法

第十二章　星形坐标体系中的多维画法几何学

第一节　星形坐标体系的建立

在三维几何中，常以正等轴测的三条轴 x_1、x_2、x_3 确定一个三维空间，如图 12-1 中的 $O-x_1x_2x_3$（以粗实线表示）。若该三维空间沿第四维方向 x_4 移动，即形成一个四维空间 $O-x_1x_2x_3x_4$（加上虚线部分）；若再沿着第五维方向 x_5 移动，则形成一个五维空间 $O-x_1x_2x_3x_4x_5$（加上细实线部分）；若再沿第六维方向 x_6 移动，则形成一个六维空间 $O-x_1x_2x_3x_4x_5x_6$（加上点划线部分）。为作图方便起见，在图示中设 x_4、x_5、x_6 分别与 x_1、x_2、x_3 在一直线上。

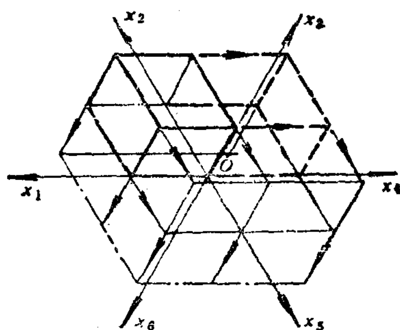


图12-1　星形坐标体系的建立

上述坐标轴在相应的维空间中都是互相垂直的，其坐标面也是互相垂直的。在图形平面上其坐标轴排列形状呈星形，故称之为星形坐标体系〔17〕。

在星形坐标体系所确定的 n 维空间中，任意少于 n 个轴所决定的空间即为 n 维空间的子空间。

第二节　几何元素的图示法

一、点的图示法

1. 点在二维投影面上的投影

图 12-2 为四维空间中点 $A(x_{1A}、x_{2A}、x_{3A}、x_{4A})$ 在星形坐标体系中的投影图。作图时，首先在轴 x_1、x_2、x_3、x_4 上按相应坐标截取 A_1、A_2、A_3、A_4 等，然后分别作坐标轴的平行线，从而确定 A 在坐标面 x_1x_2、x_2x_3、x_3x_4 上的投影 A_{12}、A_{23}、A_{34}；同理，可作出 A 在其

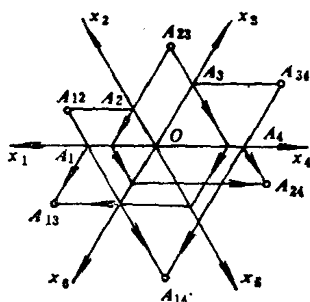


图12-2　四维空间中点的图示法

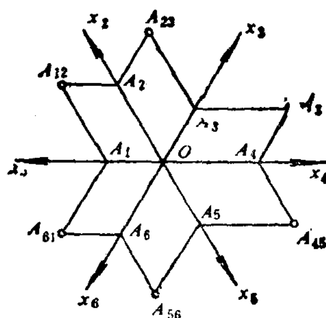


图12-3　六维空间中点的图示法

他坐标面上的投影。为了使图形不重叠，可用坐标轴旋转的方式，如图 12-2 所示，利用等边三角形各边相等的几何性质，将坐标值转移到旋转后的坐标轴上，从而作出其他三个投影 A_{13}、A_{24}、A_{14}（图中箭头表示作图过程)。这就是四维空间中点的六面投影图，它分布在星形坐标体系的六个坐标面区域内。在一般情况下，以 A_{12}、A_{23}、A_{34} 表示四维空间中的点 A。

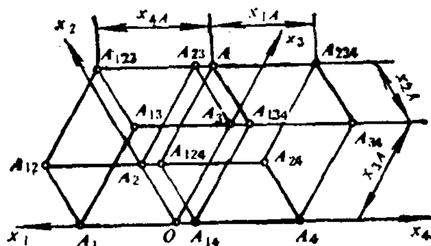


图12-4　四维空间中点A在三维投影子空间中的投影

图 12-3 为六维空间中点A的投影图。它在二维投影面上的投影为 A_{12}、A_{23}、A_{34}、A_{45}、A_{56}、A_{61}。通常，只要其中五个投影即可表达。

2. 点在投影子空间中的投影

在星形坐标体系中，还可以作出点在子空间中的投影。如图 12-4 所示，由 A_{12}、A_{23} 即可确定点A在三维投影子空间 $O-x_1x_2x_3$ 中的投影 A_{123}。同理，可作出点在$O-x_2x_3x_4$、$O-x_1x_2x_4$、$O-x_1x_3x_4$ 等三维投影子空间中的投影 A_{234}、A_{124}、A_{134}。如以 A_{123} 向轴 x_4 方向量

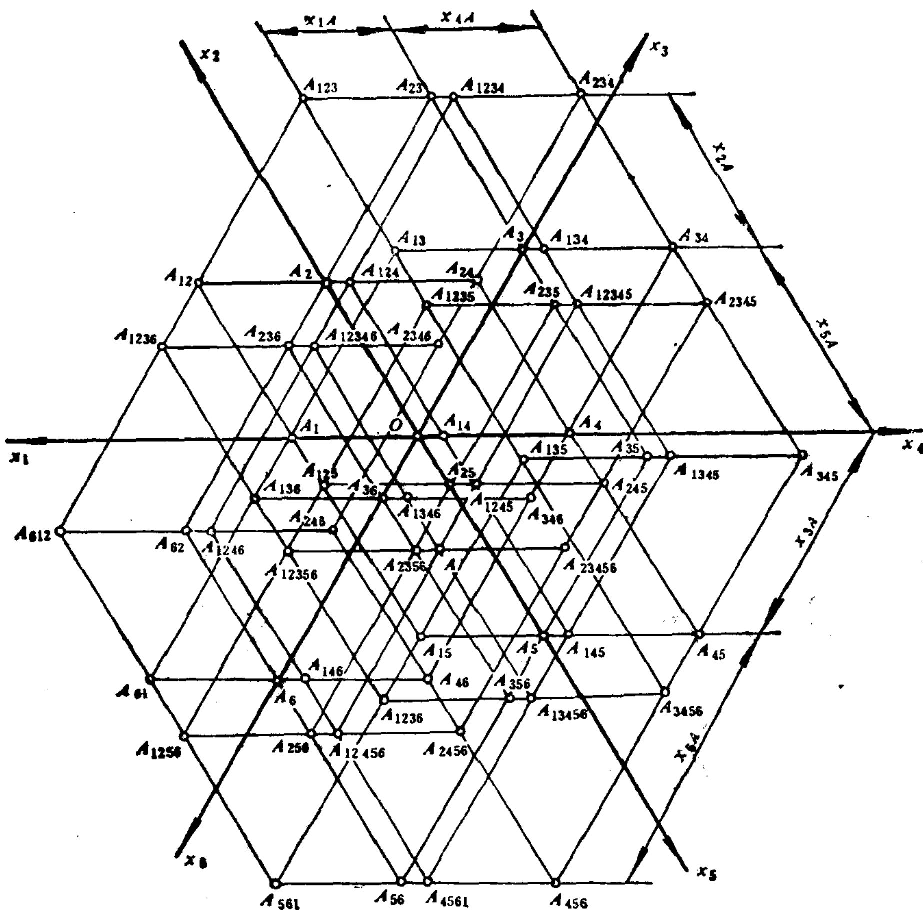


图12-5　六维空间中点在各个投影子空间中的投影

取 x_{4A} 的坐标值，即可确定四维空间中 A 点的位置。

如图 12-5 所示为六维空间中 A 点在各投影子空间中的所有投影，包括 6 个一维投影（如 A_1）、15 个二维投影（如 A_{12}）、20 个三维投影（如 A_{123}），15 个四维投影（如 A_{1234}）、6 个五维投影（如 A_{12345}）。

二、直线的图示法

直线上两点的同面投影的连线即为直线的各个投影。如图 12-6 所示。图 12-7 为平行于 $O-x_2x_3x_4$ 的直线 AB 的投影图，其中 $x_{1A}=x_{1B}$，所以 $A_{12}B_{12}\,/\!/\,x_2$。

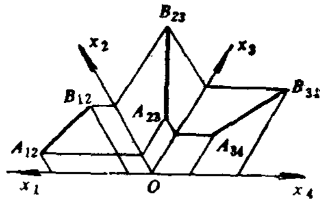


图12-6　一般位置直线的投影图

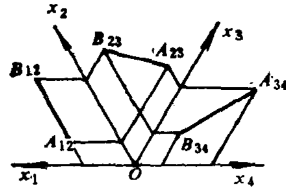


图12-7　平行于 $O-x_2x_2x_3$ 的直线的投影图

三、平面的图示法

平面上三点的同面投影的连接图形即为平面的各个投影。图 12-8 为一般位置平面 $\triangle ABC$ 的投影图。若点 K 在属于 $\triangle ABC$ 的直线 BD 上，则 K 在 $\triangle ABC$ 上。图 12-9 为一般位置平面的迹线表示法。平面迹线为平面与投影空间的交线，平面迹线与投影面的交点即为平面在该投影面上的迹点。如图 12-9 所示，M、N、S 分别为平面在 x_1x_2、x_2x_3、x_3x_4 上的迹点。由于 M、N 在同一投影空间 $O-x_1x_2x_3$ 中，因此 MN 为平面与 $O-x_1x_2x_3$ 的交线（迹线），同理，NS 为平面与 $O-x_2x_3x_4$ 的交线（迹线）。

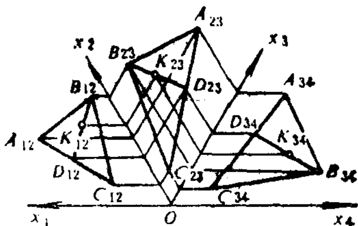


图12-8　一般位置平面的投影图

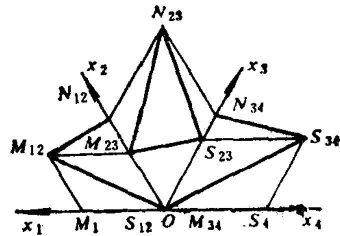


图12-9　平面的投影图（迹线表示法）

图 12-10 为平行于投影空间 $O-x_1x_3x_4$ 的平面 $\triangle ABC$ 的投影图，由于 $x_{2A}=x_{2B}=x_{2C}$，因此 $A_{12}B_{12}C_{12}\,/\!/\,x_1$，$A_{23}B_{23}C_{23}\,/\!/\,x_3$。

如图 12-11 所示，$\triangle ABC$ 平行 $O-x_1x_2x_4$、$O-x_1x_3x_4$，也即垂直于 $O-x_2x_3x_4$、$O-x_1x_2x_3$ 或垂直于 x_2x_3 或平行于 x_1x_4。这时 $A_{12}B_{12}C_{12}\,/\!/\,x_1$，$A_{34}B_{34}C_{34}\,/\!/\,x_4$，$A_{23}B_{23}C_{23}$ 重影为一点。

如图 12-12 所示，$\triangle ABC$ 半平行或半垂直于 x_1x_2 和 x_3x_4。其中，投影 $A_{12}B_{12}C_{12}$、A_{34}、B_{34}、C_{34} 均为直线，$A_{23}B_{23}C_{23}$ 为三角形，其余三个投影也均为三角形（图中省略）。

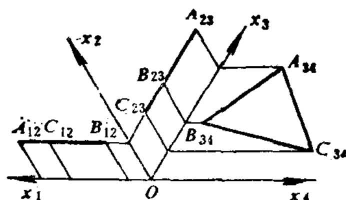


图12-10　平行于$O-x_1x_3x_4$的平面的投影图

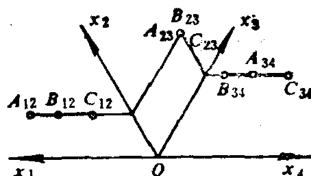


图12-11　垂直于x_2x_3的平面的投影图

四、超平面的图示法

不在同平面上的四个点，其同面投影的连接图形即为它们所确定的超平面的各个投影。

图 12-13 为用迹线 τ_{12}、τ_{23}、τ_{34} 表示的超平面 T 的投影图。

图 12-14 为垂直于 $O-x_2x_3x_4$，即平行于轴 x_1 的超平面 T 的投影图，这时 $\tau_{12}/\!/x_1$。

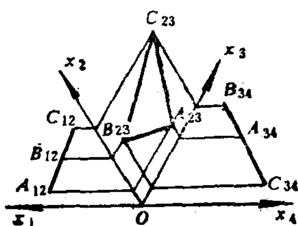


图12-12　半平行或半垂直于x_1x_2和x_3x_4的平面的投影图

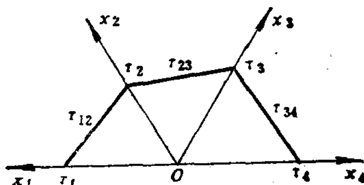


图12-13　一般位置超平面的迹线表示法

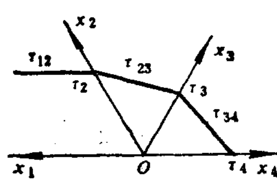


图12-14　垂直于$O-x_2x_3x_4$的超平面的迹线表示法

第三节　几何元素间的相对位置

一、两超平面相交

如图 12-15 所示，一般位置的超平面 T、Λ在四维空间中相交，其相交几何元素为一平面。由于 τ_{12} 和λ_{12} 处在同一坐标面 x_1x_2 上，因此其交点M即为两超平面的一个共有点。同理，N、S也是两超平面的共有点，M、N、S三点所形成的三角形$\triangle MNS$ 即为两超平面的交平面。

如图 12-16 所示，平行于 $O-x_2x_3x_4$ 的超平面 T 与一般位置超平面 Λ 相交，其交平面 MAB 在坐标面 x_1x_2 上的投影 $M_{12}A_{12}B_{12}$ 与 τ_{12} 重影，即平行于轴 x_2。由于 T$/\!/$ $O-x_2x_3x_4$，则Λ的迹面与 T、$O-x_2x_3x_4$ 两空间的交线必定互相平行，即$MA/\!/\lambda_{23}$，$AB/\!/\lambda_{34}$，也即$M_{23}A_{23}/\!/\lambda_{23}$，$A_{34}B_{34}/\!/\lambda_{34}$，由此可作出交平面的各个投影。

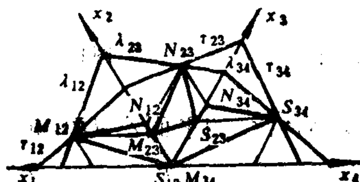


图12-15　一般位置的两超平面相交

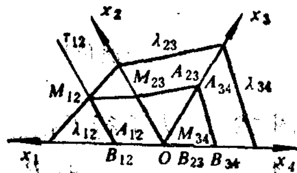


图12-16　平行于$O-x_2x_3x_4$的超平面与一般位置超平面相交

如图 12-17 所示，六维空间中的两个五维空间 T、Λ相交，其中 T 平行于$O-x_1x_2x_3x_4x_5$，交空间为四维空间Ω，由于 $\tau_{61}/\!/x_1$，因此 $\omega_{12}/\!/\lambda_{12}$，$\omega_{23}/\!/\lambda_{23}$，$\omega_{34}/\!/\lambda_{34}$，$\omega_{45}/\!/\lambda_{45}$。

二、直线与超平面相交

图 12-18 为直线 l 与超平面 T 的交点作图法。首先，过直线 l 作超平面Λ垂直于坐标面 x_1x_2，λ_{12} 与 l_{12} 重合，然后作出Λ与 T 的交平面△MNS。由于 l 与△MNS 处在同一空间Λ中，所以可求出两者的交点 K，其作法与三维空间中用辅助面作交点的方法相同，先求出 K_{23}、K_{34}，再求出 K_{12}。

三、在超平面内取点

在以迹线表示的超平面 T 内取点的作图法，如图 12-19 所示，已知 T 内点 K 的两个投影 K_{12}、K_{23}，求作 K_{34}。首先，过点 K 作辅助超平面，按图示方法求出在 $O-x_2x_3x_4$ 内交平面的投影。然后，过 K_{23} 作 $K_{23}\ D_{23}$∥$A_{23}B_{23}$，由 D_{23}作出D_{34}，过 D_{34}作$D_{34}K_{34}$∥$A_{34}B_{34}$，$D_{34}K_{34}$与从K_{23}引出的投影连系线相交，即得 K_{34}。

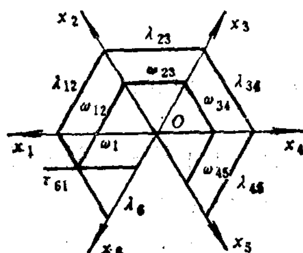


图12-17　六维空间中两个五维空间相交

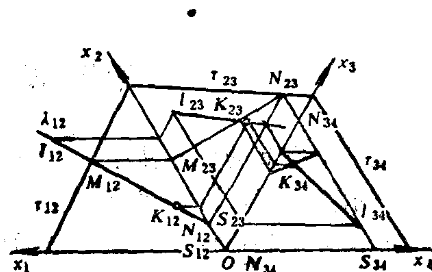


图12-18　直线与超平面相交

四、两超平面平行

若两超平面平行，则其同面迹线必定互相平行，反之也然。如图 12-20 所示，两超平面 T、Λ互相平行，则 τ_{12}∥λ_{12}，τ_{23}∥λ_{23}，τ_{34}∥λ_{34}。

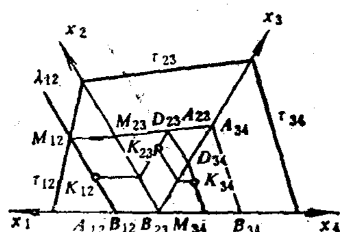


图12-19　在超平面内取点

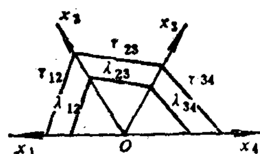


图12-20　两超平面平行

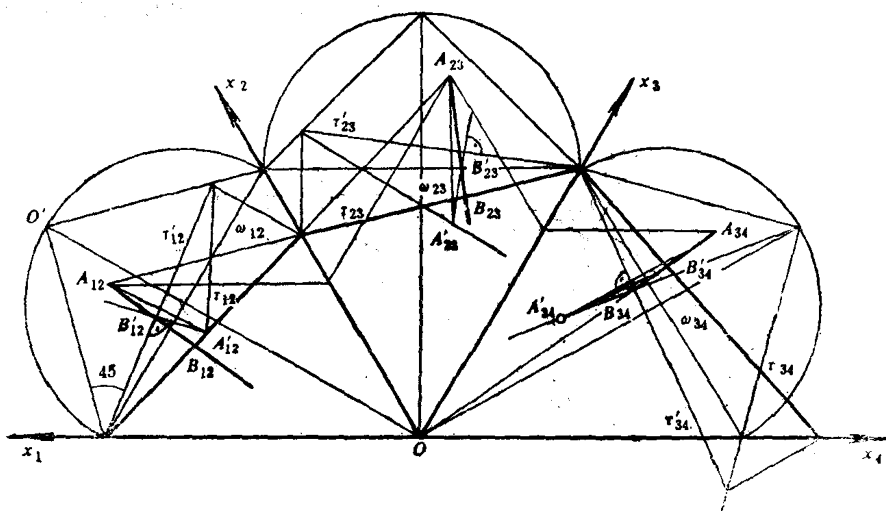


图12-21　直线垂直于超平面

五、直线垂直于超平面

从A点向超平面T作垂线，如图12-21所示。先作轴测超平行面Ω，其迹线为ω_{12}、ω_{23}、ω_{34}。过τ_1作直线与ω_{12}成45°，并与以ω_{12}为直径的半圆交于O'。以ω_{12}为对应轴，O、O'为对应点，求出τ_{12}的对应线τ'_{12}，A_{12}的对应点A'_{12}。作$A'_{12}B'_{12}\perp\tau'_{12}$，$A'_{12}B'_{12}$的对应直线$A_{12}B_{12}$即为所求。同理，可求出垂直于$\tau_{23}$、$\tau_{34}$的垂线$A_{23}B_{23}$、$A_{34}B_{34}$。

第四节　曲面、超曲面的图示法

在三维空间的图示法中，一般不规则曲面可用平行截面截交曲面而得到的一系列等值曲线来表示。同样，在四维空间中，可采用平行超截面截交三维超曲面而得到的一系列二维等值曲面来表示超曲面。在星形坐标体系中，超截面截得的二维曲面有两种表示方式：

（1）用二维曲面在三维子空间中的投影表示。图12-22中，$M_1N_2S_3$所围成的曲面即为等值二维曲面在子空间$O-x_1x_2x_3$中的投影。L_1、L_2、L_3……为该曲面投影的一系列等值曲线。画出相应的二维投影l_1、l_2、l_3……，即可表示超截面截得的二维曲面。

（2）用一系列截平面截得二维曲面的等值曲线表示。如图12-23所示，用平行截平面截得的一系列等值曲线的二维投影l_1、l_2、l_3……等表示超截面截得的二维曲面。同时，还要画出相应的等值线d_1、d_2、d_3……等。

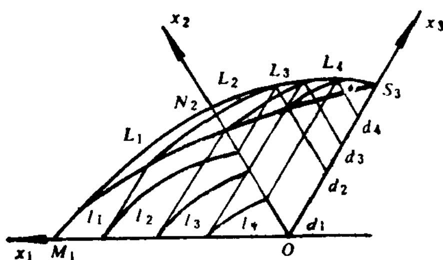


图12-22　二维曲面在$O-x_1x_2x_3$中的投影

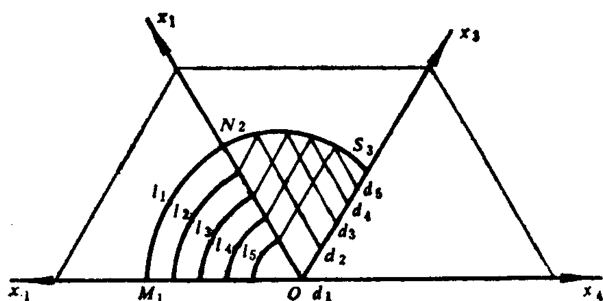


图12-23　用一系列等值曲线的二维投影表示二维曲面

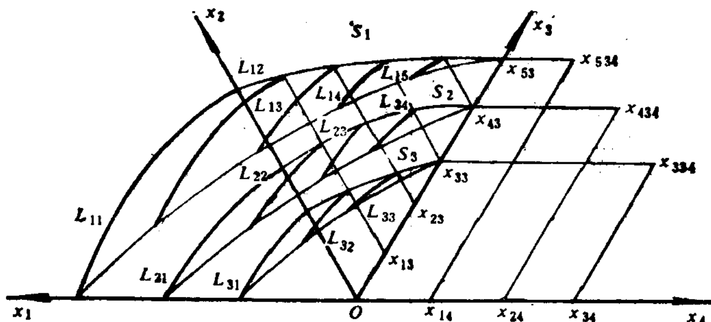


图12-24　用一系列二维等值曲面在$O-x_1x_2x_3$中表示三维超曲面

图 12-24 是利用图 12-22 的方法，采用一系列二维等值曲面 S_1（L_{11}、L_{12}、L_{13}……）、S_2（L_{21}、L_{22}、L_{23}……）、S_3（L_{31}、L_{32}、L_{33}……）来表示三维超曲面 S。当某一参数为定值时，还可作出相应的等值曲面，如该参数的值在 x_3 轴上相应的点为 x_{13}，各二维曲面 S_1、S_2、S_3……上相应的曲线 L_{12}、L_{22}、L_{32}……即表示 x_{13} 的等值曲面。

图 12-25 是利用图 12-23 的方法表示超曲面。与上述情况类似，为清晰起见，使不同等值曲线不相重叠，可将这些曲面依次展开排列。

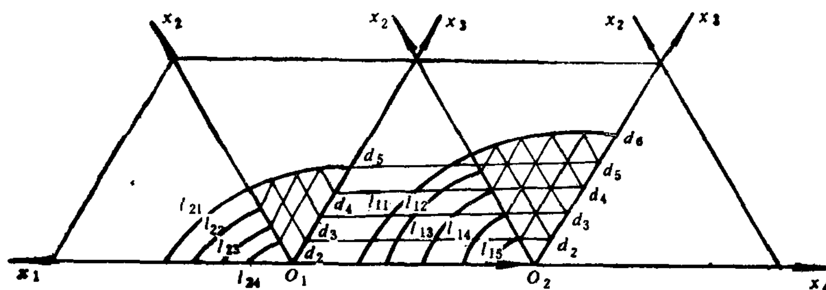


图 12-25 用一系列二维等值曲面的投影表示三维超曲面

第四篇　多维画法几何在科学技术方面的应用

近年来，运用多维画法几何来解决科学、技术领域中各种多变量问题，已取得明显的进展。多维画法几何已应用于物理—化学分析；金属学中多组分合金系统分析；地质学中的晶体结构分析；近代物理中相对论的描述；光滑曲面的图解设计；多目标最优化问题；线性规划问题以及数学中的三重积分、复变函数问题等等。

在人类的日常活动中，充满着各种各样的多变量问题，如遗传及病理研究、企业管理、产品的质量指标、营养、体育运动……等等。多维画法几何是描述和解决多变量问题的工具之一，因此，运用多维画法几何解决多变量问题将有十分广宽的前途。在解决各种具体问题中，又必将促使多维画法几何在理论上进一步的研究和发展。

根据国内、外研究的动态，提出一些可以进一步深入研究的课题供参考。

（1）对各种不同体系的多维画法几何进行分析、比较，并根据具体问题，选择合适的图示体系或提出新的图示体系的图解方法。

（2）过去，国内、外学者主要研究的是多变量线性问题，对于多变量非线性问题的图示理论和图解方法，还没有取得系统而明显的成果。但是，在实践中，多变量非线性问题是大量存在的，因此对多变量非线性问题的图示理论和图解方法进行系统深入的研究将是极其重要的。

（3）随着多自由度（如六自由度）机器人研究工作的迅速发展，如何直观地描述或解决多自由度机器人的运动学问题，有着很大实用价值。

（4）提出 n 元线性规划问题的画法几何模型。

（5）物理化学中四元以上相图的图示和图解方法的研究。

（6）提出多目标优化问题的画法几何模型。

第十三章　在物理、化学、冶金中的应用

第一节　确定类质同晶化合物的成分

在从事电石研究时，可以用多维画法几何来确定属于电石群中的矿物质。

设已知五种矿物质A、B、C、D、E的化学成分如表 13-1：

其中　A、B、C、D均为电石，试确定F是否是电石？

分析：由表中可看出，上述化合物均属五组分系统，由于各组分含量之和为100，若已

表13-1 五种矿物质的组成

名称 \ 组成	H_2O	R_2O	RO	R_2O_3	$SiO_2+R_2O_3$
A	13.79	6.90	—	27.58	51.72
B	16	—	8	25.6	50.40
C	10	—	30	16	44
D	10	8	16	19.60	46.40
F	15.21	4.80	3.04	26.75	50.19

知其中四种组分的含量，余下的一种组分就确定了，因此可看作为四维问题，即将五组分系统中四种类质同晶物质的化学成分作为四维空间中点的坐标，A、B、C、D则是四维空间中的四个点，它们决定一个超平面 $ABCD$。根据化合物所具有的均衡性、连续性等性质可知，在 $ABCD$ 超平面内的每一点都是电石。因此，要确定物质F是否是电石，只须判别点F是否在超平面 $ABCD$ 内。

具体作图步骤如下（图13-1）：

（1）设四根坐标轴分别代表四种组成（R_2O，H_2O，RO，R_2O_3）。

（2）根据各组分的含量分别作出A、B、C、D各点（为了减小图的幅面，各坐标轴上数值的起点和标尺比例并不相同），$ABCD$ 决定一超平面。

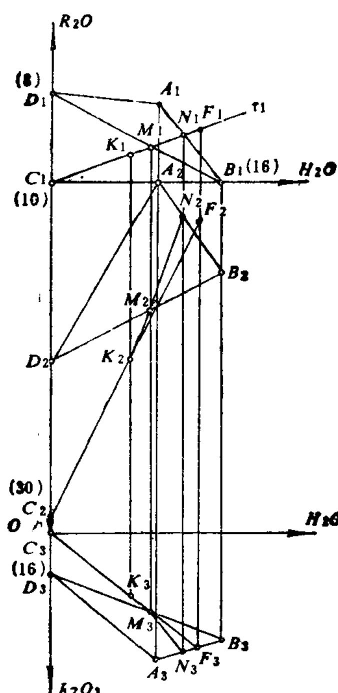


图13-1 在确定类质同晶化合物成分上的应用实例

（3）作出点F，并与点C相连，再检查：CF 与 ABC 是否共存于同一三维空间内。为此，过CF 作辅助超平面T，它与 ABC 的交线为 MN，并检查 CF 与 MN 是否相交（或平行）。如果它们相交于点K，则说明F从属于超平面 $ABCD$ 内，即矿物质F也是电石。

第二节 线图及其在物理-化学分析等领域中的应用

在物理—化学分析领域中，一些分析对象在时间、温度、压力等因素的影响下，其相互间的关系将发生变化，通常用所谓线图来直观地描述分析对象在各种因素影响下的线性关系。在线图的一些轴上标注各个成分的百分数；在另一些轴上标注各影响的因素。这种线图经过数值的内插或外插，就可以直观地看出各变量之间的相互关系。现通过具体问题来说明线图的绘制和应用[6]。

例 已知易挥发液体A的容积为20cc，影响液体挥发的因素为时间、温度、压力。

设经过4单位时间后，液体 A 由 20cc 挥发至 12cc；当温度为8个单位时，液体 A 由 20cc挥发为10cc；当压力为12个单位时，液体 A 由 20cc 挥发为 15cc，试作出其四维线图，并求出当时间为2单位、温度为4单位、压力为6单位时，液体 A 挥发后剩余的容积为多少？

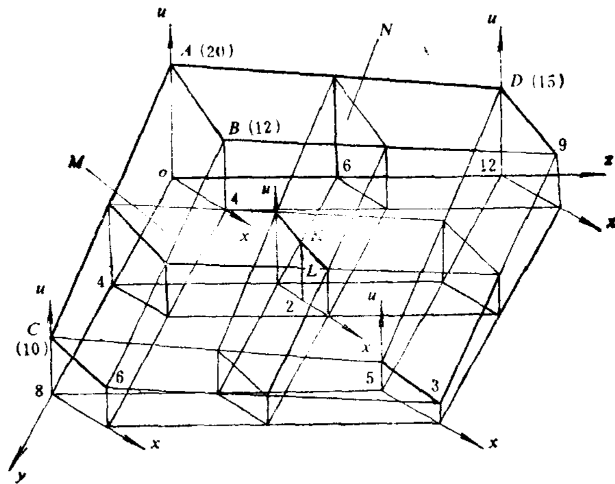


图13-2　线图的应用实例

解：

（1）取轴 Ou 表示易挥发液体 A 的容积，在 Ou 上取点 a 表示 20cc（图 13-2）。

（2）取轴 Ox 表示时间（$Ox\perp Ou$），在轴 x 上取四个单位时，液体 A 挥发为 12cc，即可作出液体对时间的二维线图 AB。

（3）取轴 Oy 表示温度（$Oy\perp Ou\perp Ox$），并使上述二维线图沿轴 Oy 移至8个单位，所得为液体 A 对时间、温度的三维线图 $ABC6$。显然，$ABC6$ 是一平面。

（4）取轴 Oz 表示压力（$Oz\perp Ox\perp Oy\perp Ou$），如果将液体 A 对时间的二维线图沿轴 Oz 移至12单位，可得液体 A 对时间、压力的三维线图 $ABD9$，它也是一个平面。

（5）如果在液体 A 挥发的同时，考虑时间、温度、压力各因素，便可得到四维线图。此时，经过4单位时间、8单位温度、12单位压力，液体 A 由 20cc 挥发为 3cc。

（6）当温度为4单位时，可用内插法（相当于用一超平面截四维线图），求得三维线图 M。同理，可求得6单位时的三维线图 N。

（7）三维线图 M 和三维线图 N 相交，可求得二维线图 L，它即是当温度为4单位，压力为6单位时，液体 A 对时间的二维线图。

（8）在轴 Ox 上取2单位，并求得 K。此时 $K2$ 的长度即为当时间为2单位、温度为4单位、压力为6单位时，液体 A 剩余的容积。

第三节　在多元合金系统浓度图中的应用

设合金P、Q、R、S均为六元合金，即它们由六个组分（a、b、c、d、e、f）组成，其组成关系为：

$$a\% + b\% + c\% + d\% + e\% + f\% = 100\%$$

对于六元合金来说，知道了其中五个组分，其余的一个组分也就确定了。因此，可将六元合金问题视为五维问题来解决。总之，n 元合金系统可看成是（$n-1$）维问题。

若已知3kg P合金、2kg Q合金、2kg R合金、2kg S合金，它们的成分见表13-2；现将它们配合成新合金M，试求其成分。

分析：n 元合金可以视为 n 维空间中的一个点，或简化为（$n-1$）维空间中的一个点。合金中每一组分的含量，可以视为确定该点的一个坐标。本例中，四个六元合金可视为五维

表13-2　合金P、Q、R、S的组成

名称＼组成	a %	b %	c %	d %	e %	f %
P	10	25	25	15	10	20
Q	25	10	8	5	22	30
R	40	23	12	18	3	4
S	60	5	6	5	10	14

空间中的四个点。

不同重量的多元合金经混合后，所得的新合金在多维空间中的位置，可按杠杆规则确定。例如在n维空间中点M、N表示两种多元合金，它们的重量分别为m、n，当合金M、N混合后所得的合金为K时，点K在多维空间中的位置可按下式确定（图13-3）：

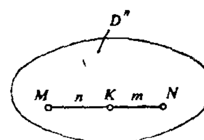


图13-3　杠杆规则示意图

$$\frac{MK}{NK}=\frac{n}{m}$$

具体作图步骤如下（图 13-4）：

（1）设五根坐标轴分别表示各组分（a、b、c、d、e）的含量。

（2）根据P、Q、R、S各合金中组分的含量，分别作出它们在五维空间中的投影。

（3）根据杠杆规则，可先确定合金R（2kg）和合金S（3kg）混合后所得合金K在五维空间中的位置，再确定合金K（4kg）和合金Q（2kg）混合后所得合金L在五维空间中的位置。最后确定合金L（6kg）和合金P（3kg）混合后所得合金M在五维空间中的位置。

（4）根据五维空间中点M的各投影，可得合金M各组分的含量为M（31、15、14、12、11、17）。

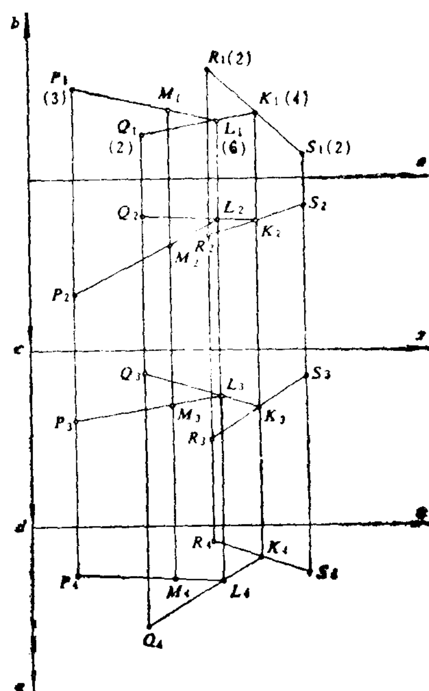


图13-4　多元合金系统浓度图的应用实例

如果将本例中的四种合金视为六维空间中的四个点，其解题过程也相同。

关于确定多元合金系统的浓度问题，还可运用星形坐标系来进行作图。

若已知四种不同的合金P、T、L、K，其中P、T为七元合金，含量分别为a_1、b_1、c_1、d_1、e_1、f_1、g_1以及a_2、b_2、c_2、d_2、e_2、f_2、g_2。L为五元合金，含量为a_3、b_3、d_3、e_3、f_3。K为四元合金，含量为a_4、b_4、c_4、d_4。现有合金P（2kg）、合金T（1kg）、合金L（3kg）、合金K（9kg），求由这四种不同合金混合后所得新合金X中各组分的含量。

图13-5为确定新合金X中各组分含量的具体作图步骤：

（1）根据各合金中的含量，作出它们的投影。

（2）按插杆规则，分别确定合金P、T混合后的合金N，以及合金L、K混合后合金M在投影图中的位置。它们分别按$\frac{PN}{TN}=\frac{1}{2}$，$\frac{LM}{KM}=\frac{9}{3}$的比例来确定。然后，根据$M$、$N$确定$X$的位置。

（3）求得合金X中各组分的含量a_x、b_x、c_x、d_x、e_x、f_x。

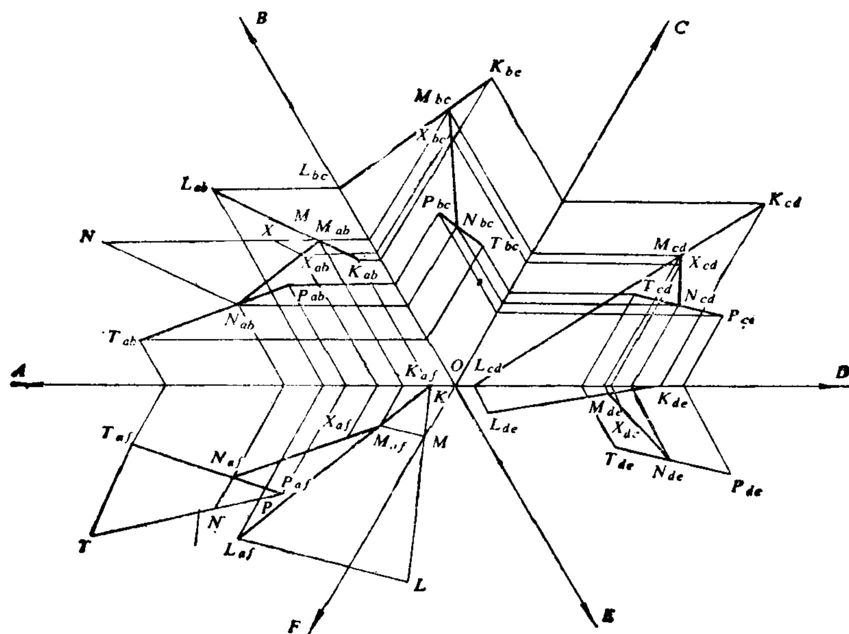


图13-5 运用星形坐标系统来确定多元合金的浓度问题

第四节 在多元化学状态图中的应用

多元化学状态图，特别是四元系统在温度变化时的化学状态图，如何应用适当而有效的方法来表示，这是多维画法几何研究的重要课题之一。本节应用星形坐标系图示法来描述四元温度状态图。

在研究三元化学图时，曾应用正三角形表示三元成分。同样，A、B、C、D四元化学图可以用正四面体$ABCD$来表示四元成分，它们的顶点表示纯组元；当点位于棱线、棱面或体内时，分别表示组合物为二元、三元或四元组成。由于取共点棱线与各坐标轴平行或重合，因此可直接度量各组元的成分。

在讨论四元化学图之前，为了便于理解，先讨论三元化学图的空间模型。如图13-6所示，在正三角形上表示A、B、C三元成分，由整个三角形上的各点沿温度轴方向（垂直于正三角形平面）移动而形成状态图。

在相当于纯组元A、B、C的纵坐标上，分别标出A、B、C的熔化温度t_A、t_B、t_C在每个侧面上组成一二元系共晶。在三元系化学图中，每一对析出同样组元的液相线构成一个液相面。在液相面上，液相为该组元所饱和，整个三元系中形成三个液相面S_A、S_B、S_C。邻近的各组元所饱和的液相面彼此相交于一二相共晶线，三个液相面两两相交于三条二相共晶线L_{AB}、L_{BC}、L_{AC}，三条二相共晶线相交于一个三相共晶点O。

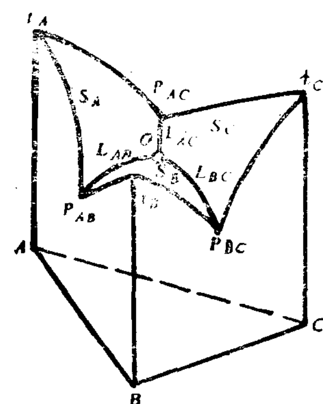


图13-6　三元系化学状态图的空间模型

现在讨论四元系化学状态图的空间模型。当四元浓度正四面体$ABCD$沿着第四维温度轴移动时，即形成四维图形。这时，该温度轴可视为垂直于正四面体，因而也垂直于组成该四面体的每个正三角形，从而得到以正四面体各表面为底的四个三棱柱组成的四维图形，即四个三元温度状态图：$A-B-C$，$B-C-D$，$C-D-A$，$D-A-B$。

在上述各三元系内，由每一对析出同样组元的液相线构成一个液相面（二维曲面），在此液相面上的液相被该组元所饱和。

在四元系内，由每三个析出同样组元的液相面（二维曲面）构成一个液相超曲面（三维曲面）。在液相超曲面上，液面被该组元所饱和。在整个四元系中，可以形成四个液相超曲面。如$A-B-C$、$A-C-D$、$A-B-D$可以构成由组元A所饱和的液相超曲面。同样还存在由组元B、C、D所饱和的另三个液相超曲面。

在四维空间中，四个三维液相超曲面两两相交，最多有六个二相二维共晶曲面，这六个共晶曲面又可两两相交于四条三相一维共晶曲线，这四条共晶曲线相交于一个四相共晶点。在图示中，可利用第十二章中所述的超曲面图示法，即先用等温超截面（这是一个与超曲面底正四面体全等且平行的正四面体）截交超曲面，截得等温二维曲面。再将此二维曲面向底正四面体投影，然后，按正四面体中的曲面在星形坐标体系中的表达方法作出四元系化学状态图。如图13-7 a 所示，作一系列等温超截面（其温度分别为t_1、t_2……），即可得到一系列二维曲面，并以此描述三维超曲面。

图13-7 b 是利用图12-25所示方法而得到的四元系化学状态图。截面与等温曲面相交，其交线即为某组元曲线。此曲线不变形地投影到投影面上，所得一系列曲线即表示各等温曲面的形状。

显然，这些液相超曲面也可采用图12-24所示的方法表示。

在用三维超截面截取液相超曲面的过程中，还会截交二维共晶曲面，即得到一系列二维共晶曲面上的等温线；同时也会截交一维共晶曲线，即得到一系列一维共晶曲线上的点（如图13-7 a 中的O_{bcd}）；在特殊情况下，可截取得四相共晶点（O_{abcd}）。如将上述截交元素按温度轴标出，即可作出共晶曲面、共晶曲线的图象。

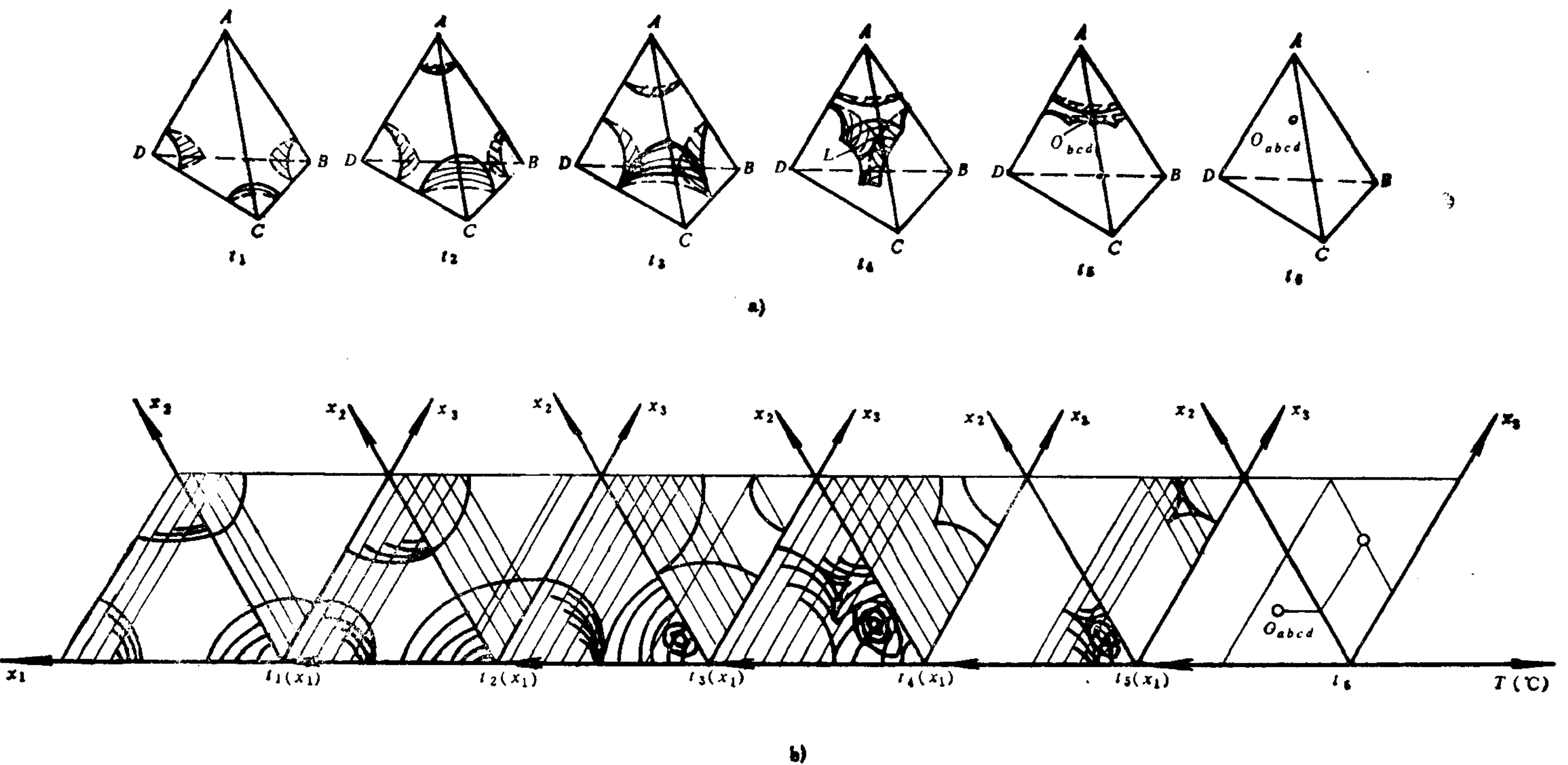


图13-7　四元系化学状态图的图示法

第十四章　在光滑曲面设计中的应用

第一节　基本概念与方法

在工程设计中，通常需要根据已知边界曲线设计光滑曲面。如图14-1 a 所示，已知边界曲线 A_0B_0、B_0C_0、C_0D_0 及直线 A_0D_0；图14-1 b 所示，已知边界曲线 A_0B_0、B_0C_0、C_0D_0；图14-1 c 所示．已知边界曲线 A_0B_0、B_0C_0、C_0D_0、D_0A_0。显然，根据这些已知的边界曲线要设计一个光滑曲面，往往由于任意性太大而造成困难。

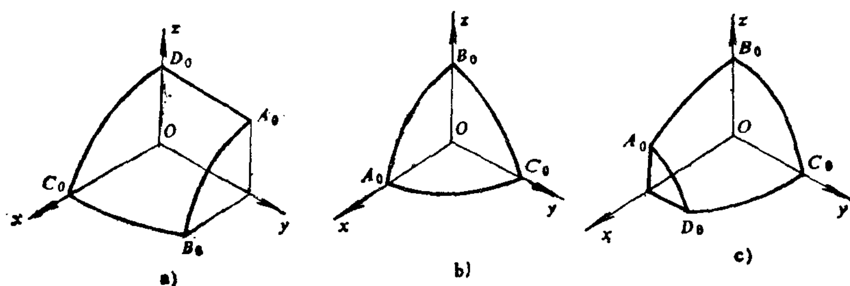


图14-1　根据边界曲线设计光滑曲面的实例

为此，在三维空间中，根据曲面边界曲线设计光滑曲面时，可将所需设计的曲面 S_0 看成是四维空间中（按一定原则建立的）某一光滑曲面 S 的超投影。在四维空间中，若将曲面 S 设计成光滑曲面，则它的超投影（即所需设计的曲面 S_0）也是光滑的曲面。

在四维空间中建立曲面 S 的一般原则是：

（1）设计曲面 S_0 是四维空间中曲面 S 在某一投影空间的超投影。曲面 S 上的型线的超投影是设计曲面 S_0 上的型线。

（2）曲面 S 与辅助超截面的交线（型线）是可求的，使曲面 S 能设计成光滑的曲面。

根据上述原则和第八章中不规则曲面部分所述的有关内容，建立曲面 S 的具体方法和要求如下：

其一，当设计曲面 S_0 上的边界曲线所在的平面为平行于某一投影面（即该边界曲线上某一坐标值相等）时，则在四维空间中，该平面应平行于相应的投影空间（即使相应坐标也具有等值），并垂直于另一投影空间（即使边界曲线在该投影空间的超投影为直线）。

其二，为了使曲面 S 上的型线是可求的，曲面 S 的各超投影中至少应有两个是直纹曲面。为了便于作图，尽量使所得直纹曲面的导平面为某一投影面。

第二节　应　用　实　例

例 1　过已知曲线 A_0B_0、B_0C_0、C_0D_0 及直线 A_0D_0 设计一光滑曲面（图14-2 a）。

分析：

在三维空间中，设计曲面S_0由边界曲线A_0B_0、$C_0D_0(/\!/ V)$、$B_0C_0(/\!/ H)$及直线A_0D($\perp V$)所确定。显然，根据这些已知的边界曲线设计光滑曲面是比较困难的。现设设计曲面S_0所在的空间与投影空间Σ_1重合，即$S_0 \equiv (S)_1$。根据上述的原则和方法，设四维空间中曲线AB及CD所在的平面既平行于Σ_3又垂直于Σ_2；曲线BC所在的平面既平行于Σ_2又垂直于Σ_3，并使直线AD垂直于Σ_3。因此，四维空间中的曲面S由曲线AB、BC、CD及直线AD所确定，它是不规则曲面。如果将曲面S设计为光滑曲面，则它在Σ_1中的超投影$(S)_1 \equiv S_0$也是光滑曲面。

具体作图步骤如下（图14-2 b）：

（1）由于$AD \perp \Sigma_3$，所以A_1D_1为点，其位置可以任意选定。

（2）由于曲线AB、CD所在的平面既平行于Σ_3又垂直于Σ_2，所以A_1B_1、C_1D_1为直线，其方向可任意选定。

（3）由于曲线BC所在的平面既平行于Σ_2又垂直于Σ_3，所以B_1C_1也是直线，其方向随A_1B_1、C_1D_1的位置而定。

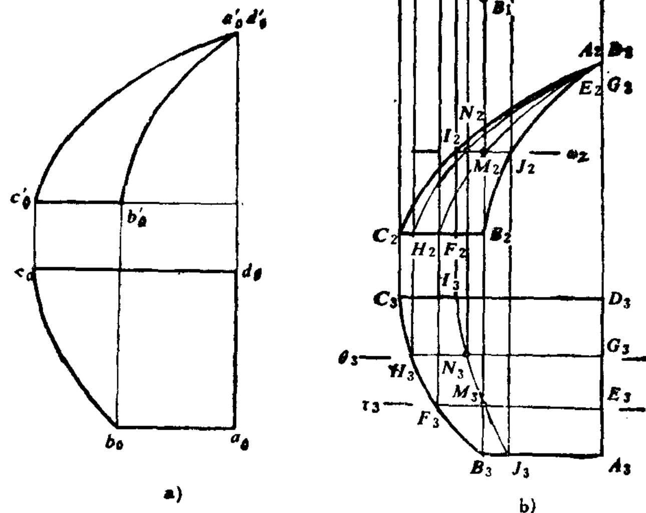


图14-2 根据已知边界曲线设计光滑曲面（一）

这样，所得曲面S在Σ_1、Σ_2、Σ_3中的超投影为：

$(S)_1$——设计曲面S_0；

$(S)_2$——锥状面〔$(BC)_2$为曲导线，$(AD)_2$为直导线，π_1为导平面〕；

$(S)_3$——柱状面〔$(AB)_3$、$(CD)_3$为曲导线，π_2为导平面〕。

（4）为了使设计曲面$S_0(\equiv (S)_1)$成为光滑曲面，首先应使曲面S成为光滑曲面。为此，作一系列辅助超截面与S相交，求得一系列截交线（光滑曲线）。图中，作辅助超截面T、$\theta(/\!/ \Sigma_3)$，它们与S的交线为曲线EF、GH。由于$(S)_2$为锥状面，所以E_1F_1、G_1H_1为直线；由于$(S)_1$为不规则曲面，所以E_2F_2、G_2H_2为曲线，先求出它们的端点E_2、F_2、G_2、H_2，另作辅助超截面$\Omega /\!/ \Sigma_2$，它与S的交线为曲线IJ，由于$(S)_3$为柱状面，所以I_1J_1为直线，而I_3J_3为曲线，求出它们的端点I_3、J_3。

（5）由于曲线EF、GH、IJ是曲面S上的曲线，可求得交点M、N，并光滑连接得EMF、GNH及$IMNJ$。同理，可求得在曲面S上的其它一系列型线，它们在Σ_1中的超投影即是设计曲面$S_0 \equiv (S)_1$上一系列不同截面的型线。这样，所求得的设计曲面S_0即是光滑曲面。

应当指出，如果改变四维空间中曲面S的边界曲线的位置和形状，其曲面S的形状也

相应改变，因而所得曲面S_0也随着改变，但仍满足已知条件。

例2 过已知边界曲线A_0B_0、B_0C_0、A_0C_0设计一光滑曲面S_0（图14-3）。

分析：

现设曲面S_0位于Σ^4中，即$S_0\equiv(S)_4$。曲面S_0上的边界曲线A_0B_0、B_0C_0、A_0C_0所在的平面分别平行于π_5、π_4、π_6。根据上述原则和方法，设四维空间中曲面S的边界曲线AB所在的平面既平行于Σ_2又垂直于Σ_1；边界曲线BC所在的平面既平行于Σ_3又垂直于Σ_2；边界曲线AC所在的平面既平行于Σ_1又垂直于Σ_3。此时，四维空间中曲面S由边界曲线AB、BC、AC所确定。

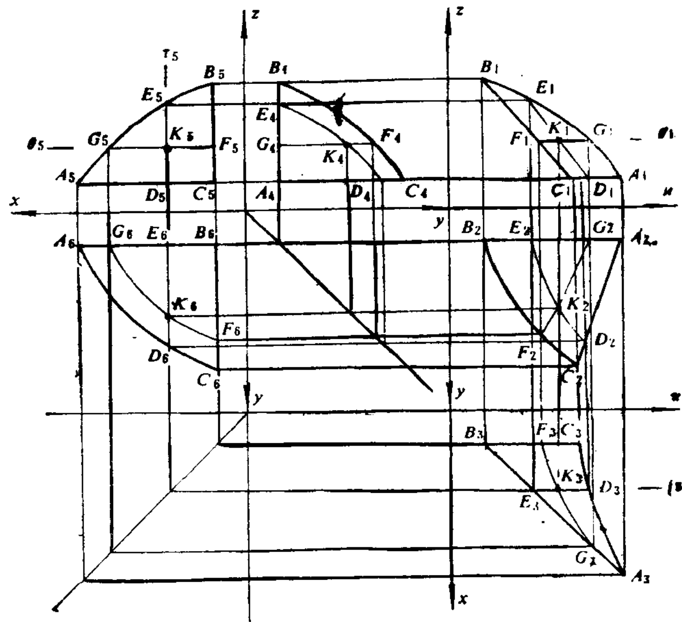


图14-3 根据已知边界曲线设计光滑曲面（二）

具体作图步骤如下：

（1）由于边界曲线AB所在的平面既平行于Σ_2又垂直于Σ_1，所以A_2B_2为平线，A_3B_3为斜线。为了便于作图，现取A_1B_1与A_5B_5、A_2B_2与A_6B_6呈对称，则A_3B_3为45°斜线。

（2）由于边界曲线BC所在的平面既平行于Σ_3又垂直于Σ_2，所以B_3C_3为平线，B_1C_1为斜线（方向可任意），并由B_1C_1、B_4C_4作出B_2C_2。

（3）由于边界曲线AC所在的平面既平行于Σ_1又垂直于Σ_3，所以A_1C_1为平线，A_2C_2为斜线，并由A_2C_2、A_6C_6作出A_3C_3。

因此，曲面S的各超投影为：

$(S)_1$——柱状面（$(BC)_1$、$(AC)_1$为曲导线，π_3为导平面）；

$(S)_2$——柱状面（$(AB)_2$、$(AC)_2$为曲导线，π_1为导平面）；

$(S)_3$——柱状面（$(AB)_3$、$(BC)_3$为曲导线，π_2为导平面）；

$(S)_4$——设计曲面S_0。

（4）作辅助超截面$T\parallel\Sigma_3$，求出T与S的交线DE的各投影。其中，D_1E_1为直线，D_2E_2、D_4E_4为曲线，作出它们的端点D_2、E_2及D_4、E_4。

（5）作辅助超截面$\Theta\parallel\Sigma_1$，求出Θ与S的交线FG的各投影。其中，F_2G_2为直线，F_3G_3、F_6G_6为曲线，作出它们的端点F_3、G_3及F_6、G_6。

（6）求出曲面S上曲线DE与FG的交点K。D_1E_1与F_1G_1的交点为K_1；D_5E_5与F_5G_5的交点为K_5，再由K_1、K_5先后求得K_2、K_3、K_4、K_6。

（7）光滑连接各点，得曲面S上的型线（$D-K-E$）及（$F-K-G$）。

同理，可求得曲面S上的一系列型线，所得的曲面S为光滑曲面。曲面S上的一系列光滑型线（$D-K-E$）及（$F-K-G$）等在Σ_4中的超投影（$A-K-E$）$_4$及（$F-K-G$）$_4$等，即是设

计曲面 S_0（即$(S)_4$）上的一系列光滑型线。此时，所得设计曲面 S_0 为光滑曲面。

例 3 过已知边界曲线 A_0B_0、B_0C_0、C_0D_0、D_0A_0 设计一光滑曲面 S_0（图14-4）。

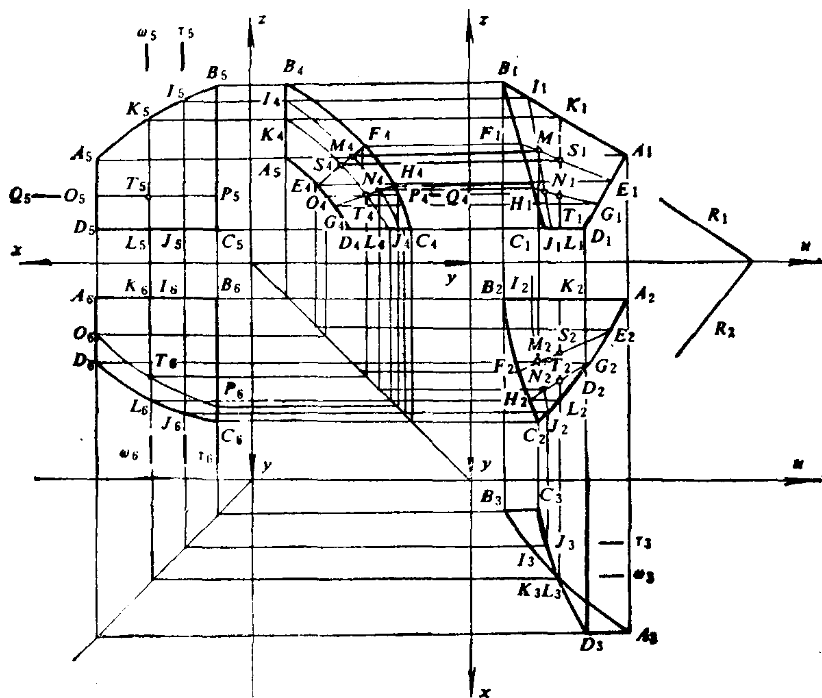


图14-4 根据已知边界曲线设计光滑曲面（三）

分析：

现设曲面 S_0 位于 Σ_4 中，即$S_0\equiv(S)_4$。曲面 S_0 上的边界曲线 A_0B_0、B_0C_0 及 D_0A_0、C_0D_0 分别平行于 π_5、π_4、π_6。根据上述原则和方法，设四维空间中曲面 S 的边界曲线 AB 所在的平面既平行于 Σ_2 又垂直于 Σ_3；边界曲线 BC、DA 所在的平面既平行于 Σ_3 又垂直于 Σ_2；边界曲线 CD 所在的平面既平行于 Σ_1 又垂直于 Σ_3。此时，曲面 S 由边界曲线 AB、BC、CD、DA 所确定。这样，曲面 S 的各超投影为：

$(S)_1$——不规则曲面〔由于$(S)_1$的边界曲线$(AB)_1$、$(BC)_1$、$(CD)_1$、$(DA)_1$均为曲线〕；

$(S)_2$——柱状面〔$(AB)_2$、$(CD)_2$为曲导线，π_1 为导平面〕；

$(S)_3$——柱状面〔$(BC)_3$、$(DA)_3$为曲导线，$(R)_3$为导平面，其导平面$(R)_3$ 在 Σ_3 中为一般位置，由迹线 R_1、R_2 表示，其中 $R_1 /\!/ A_1B_1$、$R_2 /\!/ C_2D_2$〕；

$(S)_4$——设计曲面S_0。

具体作图步骤如下：

（1）由于曲面 S 的边界曲线 AB 所在的平面既平行于 Σ_2 又垂直于 Σ_3，所以 A_2B_2为平线（设 A_2B_2 与 A_6B_6 呈对称），A_1B_1 为斜线（可由 A_2B_2、A_4B_4 确定）。根据 A_1B_1、A_5B_5作出曲线 A_3B_3。

（2）由于边界曲线 BC 所在的平面既平行于 Σ_3 又垂直于 Σ_2，所以 B_3C_3 为平线（在作图方便的前提下 C_3 的位置任意选定），B_1C_1 为斜线（由 B_3C_3、B_5C_5 确定），再由 B_1C_1、B_4C_4 作出曲线 B_2C_2。

（3）由于边界曲线 CD 所在的平面既平行于 Σ_1 又垂直于 Σ_3，所以 C_1D_1 为平线（在满

足 D_3A_3 为平线的前提下 D_1 的位置任意确定)，C_2D_2 为斜线（由 C_1D_1、C_4D_4 作出)，再由 C_2D_2、C_8D_8作出曲线 C_3D_3。

（4）由于边界曲线 DA 所在的平面既平行于 Σ_3 又垂直于 Σ_2，所以 D_3A_3 为水平线，D_1A_1 为斜线，再由D_1A_1、D_4A_4 作出曲线 D_2A_2。

（5）为了求出曲面 S 上的型线，作辅助超截面 T 、Ω(∥Σ_3)，并分别求出它们与 S 的交线 IJ、KL 的各投影。其中，I_1J_1、K_1L_1、K_2L_2 为直线；I_2J_2、I_4J_4、K_4L_4 为曲线，求出它们的端点 I_2、J_2；I_4、J_4；K_4、L_4。

（6）由于 $(S)_3$为柱状面，如果在 Σ_8 中作平面（图中来作出）平行于导平面R，它们与 $(S)_3$的交线为直线 $(EF)_3$、$(HG)_3$，即 E_1F_1、E_2F_2、E_4F_4、H_1G_1、H_2G_2、H_4G_4均为直线。

（7）分别求出 I_1J_1、K_1L_1 与 E_1F_1、H_1G_1 的交点 M_1、N_1、S_1、T_1，再求出 M_4、N_4、S_4、T_4，并光滑连接，可得曲线 $I_4M_4N_4J_4$、$K_4S_4T_4L_4$。这样，就求出了设计曲面 S_0 的一组型线。

（8）在 S_0 所在的三维空间（即 Σ_4）中作截平面 Q，可求得设计曲面 S_0上的另一组型线 $(O-T-P)_4$。

第十五章　在多目标优化问题中的应用

近年来，用数学模型来描述多目标优化问题有了很大的发展，但要广泛地应用到实际中去，尚存在一定的困难。本章运用多维画法几何模型来描述多目标优化问题，其特点是，增加了搜索多目标优化值的直观性、预测性，易于推广，并且为采用计算机寻求多目标优化值提供了简单而直接的几何模型。

第一节　多目标响应（超）曲面的建立

在多目标试验中，最简单的情况是双目标双因素，即

$$\begin{cases} y_1 = y_1(A、B) \\ y_2 = y_2(A、B) \end{cases} \tag{15-1}$$

式中　A、B——试验中的因素；

y_1、y_2——试验中的目标值。

在三维空间中，满足上述函数关系的所有点组成两个曲面（响应曲面）。对于每个响应曲面而言，有三个变量 y_1、A、B（或 y_2、A、B）通过一个函数关系式相关联。因此，上述两响应曲面是两个二维曲面，且共存于同一三维空间中。图 15-1 a 是描述双目标 y_1、y_2 双因素 A、B 试验时所构成的两个（二维）响应曲面 Φ_1、Φ_2 的示意图。

图15-1 b 表示其中某一次试验〔$(A_i、B_j、y_1)$；$(A_i、B_j、y_2)$〕时的双目标三维综合投影图。y_1、y_2为该次试验（A_i、B_j）时所得的两个目标值。对于 OAB 平面域中的每一点，与一次可能的试验相对应。为了清楚地表示每次试验中各个目标值，将 $OAy_1(OAy_2)$ 二维投影域平行展开。

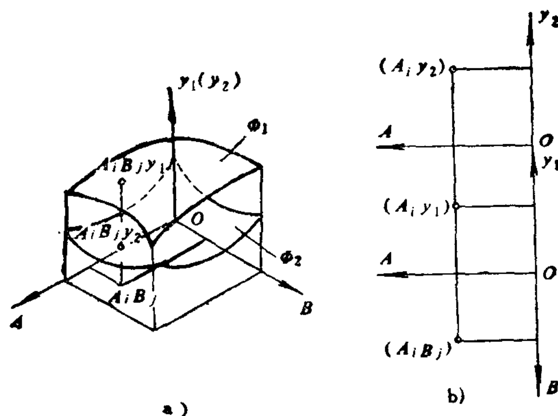


图15-1　多目标响应曲面的建立

当双目标三因素时，即

$$\begin{cases} y_1 = y_1(A、B、C) \\ y_2 = y_2(A、B、C) \end{cases} \tag{15-2}$$

同理，式（15-2）可理解为：在四维空间中，满足上述函数关系式的所有点组成两个超曲面（响应超曲面），对于每个响应超曲面而言，有四个变量 y_1、A、B、C（y_2、A、B、C）与一个函数关系式相关联。因此，这两个响应超曲面是三维的，且共存于同一四维空间中。

图 15-2是其中某次试验（$(A_i$、B_j、C_k、$y_1)$；$(A_i$、B_j、C_k、$y_2)$）时的双目标四维综合投影图。对于超平面 $OABC$ 内的每一点与一次可能的试验相对应。

为了便于理解和分析多目标响应超曲面，现以两目标三因素（均取三个水平）试验为例加以说明。设试验时的两个目标为 y_1、y_2，三个因素为 A、B、C，每个试验因素各有三个水平，以 A_1、A_2、A_3；B_1、B_2、B_3 和 C_1、C_2、C_3 表示。如果按全面试验安排试验，有 $A_1B_1C_1$、$A_1B_2C_1$、$A_1B_3C_1$、$A_2B_1C_1$、……、$A_3B_3C_3$ 共 27 个试验点，按顺序对各次试验进行编号（1、2、3、……27）。图 15-3 表示该试验的示意图，四条互相垂直的轴为 OA、OB、OC、Oy_1（Oy_2），其中，OA、OB、OC 为试验因素轴，由它们组成的空间称为因素域。因素域中的每一点，与一次可能的试验相对应。Oy_1（Oy_2）为目标轴。目标轴垂直于因素域。依此推论：当具有 m 个目标、n 个因素时，则在 $n+1$ 维空间中，目标轴 Oy_1（Oy_2、Oy_3……Oy_m）必定垂直于因素域（n 维空间）。

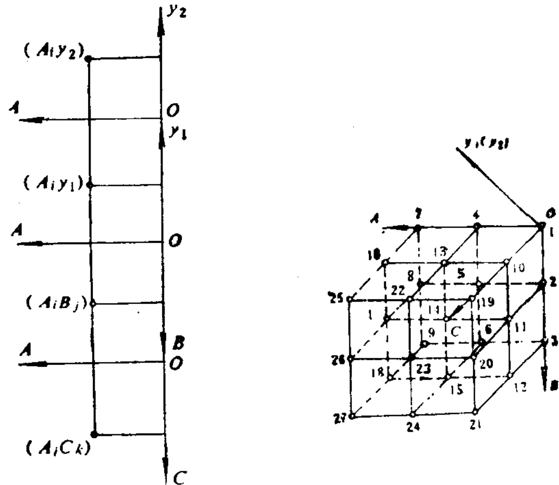


图15-2 双目标四维投影图的建立

图15-3 表示双目标三因素试验时的示意图

根据多维画法几何的投影原理，对图 15-3 所示的几何模型进行投影，可得图 15-4 a（图中未表示各次试验的目标值）。

为了避免图形重叠，可将图 15-4 a 横向展开得图 15-4 b。为了便于搜索多目标优化值，可进一步将图 15-4 b 展开得图 15-4 c。

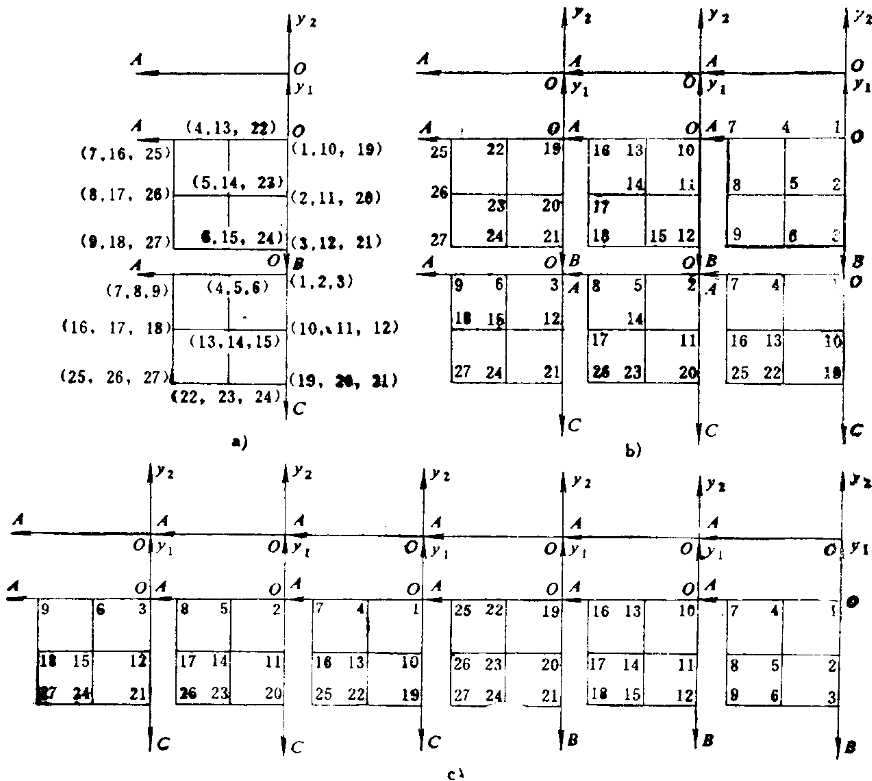


图15-4 双目标三因素三水平时的投影图

应当指出，上述图形的展开方式，可根据具体情况另行安排。

图 15-5 a 是描述两目标三因素（均取四个水平）试验时的投影图(未表示各次试验的目标值)。图 15-5 b 为将图形展开后的情况。

图 15-4 c 可进一步分析如下：

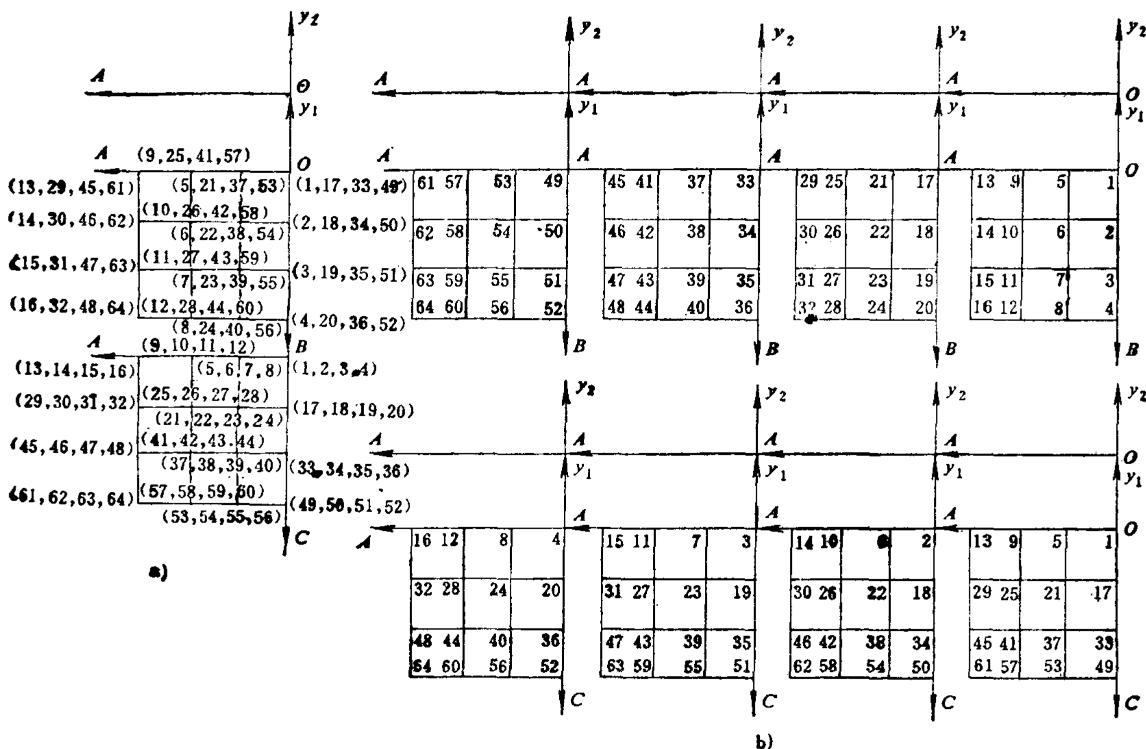


图15-5　双目标三因素四水平时的投影图

（1）对于两目标三因素（均为三水平）的全面试验，可用两个共存于四维空间的（三维）响应超曲面来描述，并且，还可等价地变换成六组（12个)相互有特定联系的、分别存在于两个三维空间的（二维）响应曲面来描述和模拟。其中，三组（六个）响应曲面存在于三维空间 $OACy_1(y_2)$内，另外三组（六个）响应曲面存在于另一三维空间 $OABy_1(y_2)$ 内。实质上，它们分别表示共存于四维空间中的两个响应超曲面在两个投影空间中所得的超投影。

（2）对于每一组（两个）响应曲面，如图 15-4 c 中第Ⅰ组（两个）响应曲面中的九次试验 3、6、9、12、15、18、21、24、27，是因素 A、C 不同水平时的组合。对于 B 因素，可从图 15-4 c 的第Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ组中看出，它们均具有相同的水平，即为 B_3 水平。其余各组响应曲面也具有相同的特点。

以上建立多目标响应超曲面的原理和方法，可推广到 m 个目标、n 个因素的优化问题。

推论：

对于 m 个目标、n 个因素（各因素的水平数分别为 K_1、K_2……K_n）的全面试验，可用 M 个共存于（$n+1$）维空间的 n 维响应（超）曲面来描述和模拟，还可等效地变换成 S 个

相互有特定联系的、分别存在于（$n-1$）个三维空间内的（二维）响应曲面。可以证明：

$$S = m\left(\frac{K_1\cdot K_2\cdot\cdots\cdot K_n}{K_1\cdot K_2}+\frac{K_1\cdot K_2\cdot\cdots\cdot K_n}{K_1\cdot K_3}+\cdots\cdots+\frac{K_1\cdot K_2\cdot\cdots\cdot K_n}{K_1\cdot K_n}\right)$$

第二节　搜索多目标优化值的原理和方法

当借助于多目标响应（超）曲面来搜索多目标优化值时，并不需要找出各响应（超）曲面的“山峰”或“山谷”，而是要在各因素取某一组值时，使各目标的试验结果都获得较优的值。

在多目标响应（超）曲面上搜索多目标优化值的途径是借助于改变等高（超）截面的方法来进行的，即对每一响应（超）曲面分别选择合适的、具有相同维数的等高（超）截面，并与相应的响应（超）曲面相交，分别得到各等高线或（超）等高面〔它们总是（$n-1$）维〕。例如对于三维响应超曲面，则选择合适的三维等高超截面，它与三维响应超曲面相交得二维等高面。应当指出，所得等高线或（超）等高面可能不至一条或一个，因为响应（超）曲面可能存在“多峰”或“多谷”的情况。

以下，通过一些具体问题来介绍搜索多目标优化值的过程和方法。

图 15-6 是描述双目标（二因素）优化问题的画法几何模型。设因素 A、B 均为五个水平，即 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 及 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5。在全面试验时，共有 25 个试验点。要求所得的目标值 y_1、y_2 越大越好。具体过程如下：

（1）根据 25 次试验中所得的各目标值，建立起共存于同一三维空间 $OABy_1$（y_2）中的两个响应曲面。

（2）分别选用 $y_1=P_1$、$y_2=Q_1$ 的等高截面与相应的响应曲面相交，所得的交线（等高线）p_1、q_1 都是一维的，且各有两条。由等高线 p_1、q_1 所围成的部分，分别以（p_1）、（q_1）表示。（p_1）、（q_1）内的每一点（即每一个可能的试验），所对应的目标值（按图 15-6 的情况而言），均分别大于或等于 P_1、Q_1。但〔（p_1）∩（q_1）〕内的每一点所对应的目标值才既大于或等于 P_1、又大于或等于 Q_1。

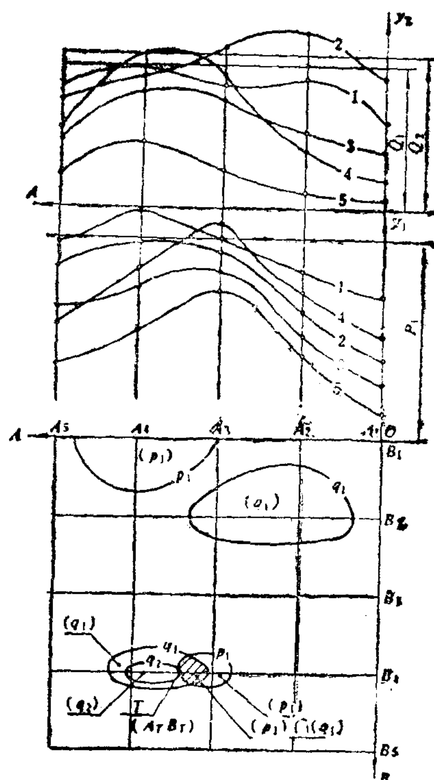


图15-6　双目标二因素优化问题的画法几何模型

（3）为了搜索其优化值，应使（p_1）、（q_1）的公有部分逐渐缩小，最好使（p_1）、（q_1）相切于一点。为此，有三个途径：改变 P 值，使（p）缩小；改变 Q 值，使（q）缩小；同时改

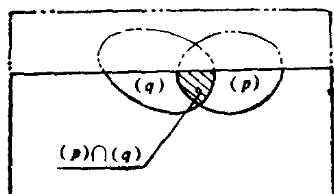


图15-7 搜索多目标优化值过程的情况分析（一）

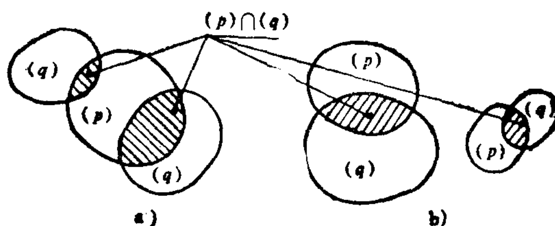


图15-8 搜索多目标优化值过程中的情况分析（二）

变P、Q值，使(p)、(q)均缩小。应根据实际情况，选择上述途径，一般原则是：当各目标值的要求存在主、次时，可优先考虑改变主要目标值的等高（超）截面；当等高截面P、Q改变时，(p)、(q)的变化速度与各响应曲面的陡度有关，即陡度越大、变化越慢，为此，一般可优先考虑改变响应曲面中陡度较大的等高截面。

（4）当Q_1变为Q_2时，所得的(p_1)与（q_2）相切于点T。值得注意的是，经过搜索所得点T（A_T、B_T）并不在已做过的25次试验之内。

（5）最后，需对搜索所得的T（A_T、B_T）进行验证试验。

上述过程是假定两目标值越大越好的情况。当要求两目标值越小越好时，其原理和方法基本相同。

下面对搜索多目标优化值过程中可能出现的一些情况讨论如下：

（1）当〔(p)∩(q)〕出现在预定试验范围的边界处时，如图15-7所示，则可适当扩大试验范围，使〔(p)∩(q)〕部分偏离试验范围边界后，再继续进行搜索。

（2）当〔(p)∩(q)〕多处同时出现时，如图15-8所示，一般可以从公有部分中较大的那部分进行重点搜索，除此之外，还应注意尽量在对生产工艺有利的区域内进行搜索。

图15-9是双目标三因素优化问题的画法几何模型。设因素A、B、C均取三水平（共有27个试验点），要求两目标y_1、y_2越大越好，并设y_2为主要目标。

具体过程如下：

（1）根据各次试验所得的目标值，可建立六组（十二个）相互有特定联系的响应曲面。

（2）选取等高截面P_1、Q_1，分别作出与各组响应曲面的等高线，并确定其公有部分，即$[(p_1)\cap(q_1)]_{AC}$和$[(p_1)\cap(q_1)]_{AB}$。显然，对其中第Ⅳ组、第Ⅵ组响应曲面可停止搜索。

（3）再选取新的等高截面P_2(Q_1不变)进行第二次搜索。此时，只有第Ⅰ组响应曲面中，(p_2)与(q_1)相切于点T，其余各组响应曲面中均没有产生公有部分，因此搜索可以暂停。事实上，在第一次搜索时，由于第Ⅰ组响应曲面中所得的公有部分$[(p_1)\cap(q_1)]_{AB_3C}$为最大，因此在进一步搜索时，可以取第Ⅰ组响应曲面为重点搜索区，其余五组响应曲面均可暂时停止搜索。这样，搜索的速度可以大大提高。

（4）根据所得的最优点T（A_T、B_3、C_T），进行验证试验。

图15-9 双目标三因素优化问题的画法几何模型

第十六章　在线性规划问题中的应用

众所周知，线性规划在工业、商业、经济等管理工作中已被广泛采用。线性规划问题中有四个变量的图解法（或图解解析法），已取得了相当满意的成果，而且在某些方面比熟知的解析法更简便。由于与图象显示或绘图机相联的电子计算机的应用，使更多变量的线性规划问题的图解法有了现实的可能性。

第一节　线性规划问题的基本概念和图解原理

一、基本概念

例如，一个简单而典型的线性规划问题：一个工厂制造A型和B型两类桌子，每张桌子要经过加工和油漆两道工序完成。木工制造一张A型桌子需一个小时，加工一张B型桌子需两个小时。油漆工油漆一张A型桌子需三个小时，油漆一张B型桌子需一个小时。木工每天工作不得超过8小时，油漆工每天工作不得超过9小时。每做一张A型桌子，工厂可获利润2元，做一张B型桌子可获利润3元。假如该工厂生产的桌子能够全部卖出，试问每天各种型号的桌子各生产多少张，才能使该工厂获得最大利润？

设x表示工厂每天做A型桌子的数目，y表示每天做B型桌子的数目。木工每天做A型桌子需x小时，做B型桌子需$2y$小时，因此，木工所用的总时数是（$x+2y$）小时。油漆工每天做A型桌子需$3x$小时，做B型桌子需y小时，因此，油漆工所用的总时数是（$3x+y$）小时。由于做负数的桌子是无意义的，因此$x\geqslant 0$；$y\geqslant 0$。最后，其利润的关系式为：

$$F=2x+3y \tag{16-1}$$

综上所述，对于上述问题，可用数学的术语表述如下：

使$F=2x+3y$为最大，并满足下列条件：

$$x\geqslant 0 \tag{16-2}$$

$$y\geqslant 0 \tag{16-3}$$

$$x+2y\leqslant 8 \tag{16-4}$$

$$3x+y\leqslant 9 \tag{16-5}$$

其中，$F=2x+3y$称为目标（利润）函数式、四个不等式组称为约束条件。目标函数和约束条件相结合称为线性规划。作为线性规划来源的具体问题称为线性规划问题。

二、线性不等式的图示方法

将式(16-2)、(16-3)、(16-4)、(16-5)取等式并化为截距式，即

$$x=0 \tag{16-6}$$

$$y=0 \tag{16-7}$$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1 \tag{16-8}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{9}=1 \tag{16-9}$$

作出它们的直线，如图 16-1 a 所示。

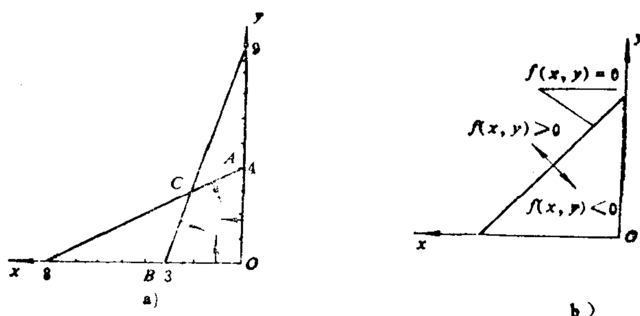


图16-1　线性不等式的图示法

为了解释各直线所围成的区域的几何意义，现进一步分析如下：

在图16-1 b 中，设

$$f(x,y)=ax+by-c$$

（1）当 $f(x,y)=0$ 时，它的图象是一直线 L。

（2）当 $f(x,y)<0$ 时，它的图象位于以 L 为界（包含原点）的一个开半平面内。

（3）当 $f(x,y)>0$ 时，它的图象位于以 L 为界的另一开半平面内。

（4）当 $f(x,y)\leqslant 0$ 时，它的图象是开半平面和它的界的并集，叫做半平面，可在 L 的一侧用箭头来表示。

（5）当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，它的图象也是一个半平面。

因此，上述线性不等式组的图象就是在这个不等式组中各个不等式图象的交集，即该图象是包括它的界的四边形区域 $OACB$，如图 16-1 a 所示。在线性规划问题中，约束条件的解集称为这个线性规划的可行解集。可行解的图象叫做可行区域，该区域上所有的点集称为凸集，其中 O、A、B、C 称为凸集顶点（或称为可行域顶点）。

三、线性规划问题的图解原理

首先分析目标函数的图示问题，如在 $F=2x+3y$ 方程中，有三个变量 F、x、y，因此不能用图像来表示这个方程的解集。但是，对于不同的 F 值就有不同的直线，显然，这些直线是一组平行直线族，如图16-2 a 所示。

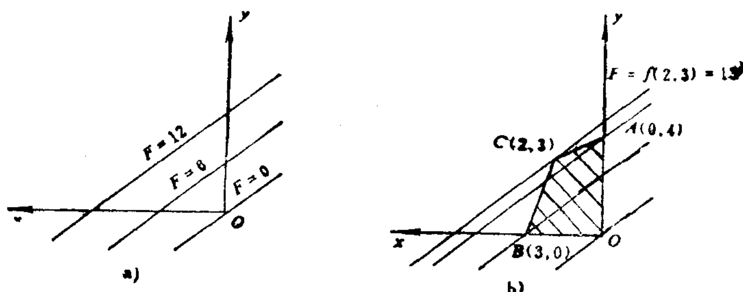


图16-2　线性规划问题的图解原理

可以证明，在一般情况下，目标函数可能的最大值或最小值，可在相应的可行域顶点中找到。这样，对于上述问题中寻找目标函数的最优解（最大值或最小值）的几何过程，可以看成是目标函数直线按照与它自己平行的某个方向运动，并通过各个顶点（如 O、A、B、C），从而寻求目标函数的最大值或最小值，如图 16-2 b 所示。此时，目标函数可在 C 点（极点）处找到最大值，即在（2、3）处的目标函数有最大

值($F=13$)。因此，上述实例中，如果该工厂每天生产A型桌子2张和B型桌子3张，就会获得最大的利润。

根据上述图解原理，可推论到更多变量的线性规划问题。现以四元线性规划问题为例加以分析：

设：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}u\leqslant b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}u\leqslant b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}u\leqslant b_3 \\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}u\leqslant b_4 \\ x\geqslant 0;\quad y\geqslant 0;\quad z\geqslant 0;\quad u\geqslant 0 \end{cases}$$

目标函数

$$F_{\max(\text{或}\min)}=c_1x+c_2y+c_3z+c_4u$$

则：

（1）一个四元线性规划问题的可行域是一凸超多面体（封闭的或不封闭的），它可看成是由条件约束式(包括正向约束式)所代表的超平面群的交集所确定，即上式中的凸超多面体是由八个超平面的交集所确定。

（2）最优解的极点可在上述凸超多面体的顶点（可行域顶点）处求得。

（3）为了求得最大值（或最小值），可过凸超多面体各顶点引目标函数的超导平面的平行超平面群，并根据各平行超平面中与原点距离为最远（或最近）来确定目标函数最大值（或最小值）时的最优解。

第二节　可行域及其顶点位置的判别

对线性规划问题进行图解时，必须先求出凸集的所有顶点，这对于变量较多的线性规划问题，并不是一件很方便的事。为此，尽量在图解之前对凸集中顶点的分布情况作必要的分析，以避免作图的盲目性，从而达到简化作图的目的。

为了便于理解，先对三元线性规划问题中的可行域及其顶点情况进行分析，然后再推论到四元线性规划问题。

一、条件约束式中全部是“≤”的情况

此时，由条件约束式和正向约束式的交集是一封闭的凸多面体（即可行域），其顶点的分布与条件约束方程的多少有关。

设变量数为 n，条件约束方程数为 m。

1. $n=m$

当三个条件约束方程取等式时，则三个平面交于一点，该点一般存在于三维空间中，如图16-3中的D点。在凸多面体$OABCDE$中，顶点A、C、E位于投影面上，顶点B位于投影轴上，O位于原点上。

推论：在四元线性规划问题中，当存在四个条件约束式时，凸集中必定有一个顶点，且位于四维空间中，其余的顶点可位于投影空间、投影平面、投影轴或原点上。

2. $n=m+1$

当$n=3$时，$m=2$，即两个平面交于一直线，如图16-4中直线BC。此时，凸集中不会有顶点位于三维空间中，在凸多面体$OABCDE$上，顶点B、C位于投影面上，顶点A、

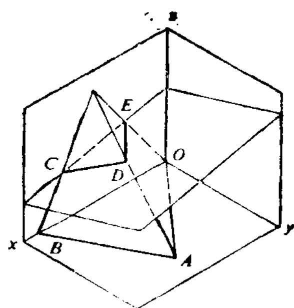


图16-3 可行域及其顶点位置判别的示意图（一）

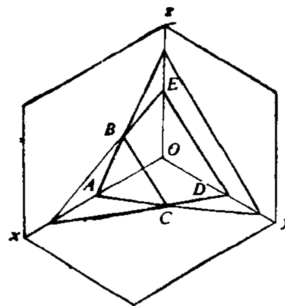


图16-4 可行域及其顶点位置判别的示意图（二）

D、E位于投影轴上，O位于原点上。

推论：在四元线性规划问题中，当存在三个条件约束式时，在四维空间中的三个超平面交于一直线。因此，不会有顶点位于四维空间中。凸超多面体上的顶点可能位于投影空间、投影面、投影轴或原点上。

3. $n = m + 2$

在三维空间中，一个平面与投影轴只能交于点，凸集中的顶点只能位于投影轴或原点上，如图 16-5 中的O、A、B、C。

推论：在四元线性规划问题中，当存在两个条件约束式时，在四维空间中的两超平面交于一平面。因此，不会有顶点位于四维空间或三维空间。凸集上的顶点可能位于投影面、投影轴或原点上。

二、条件约束式中全部是“≥”的情况

此时，由条件约束式所得的可行域是不封闭的，如图 16-6 所示。对于这类线性规划问题，一般是只求最小值。关于其顶点的分布情况，与前述情况基本相同。

三、条件约束式中包含“≤”、“≥”的情况

此时，条件约束式的交集可构成一凸（超）多面体。但是该凸(超)多面体及其顶点的情况将随着条件约束式不等式符号的改变而变化。

设三维空间中两条件约束式为P、Q。

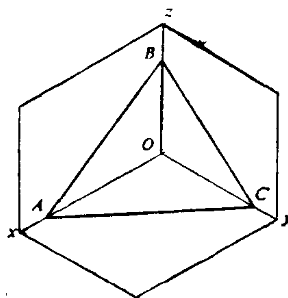


图16-5 可行域及其顶点位置判别的示意图（三）

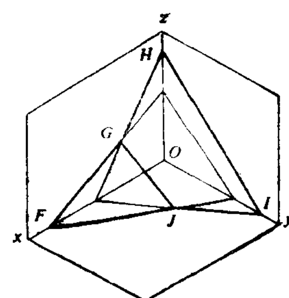


图16-6 可行域及其顶点位置判别的示意图（四）

如果$P \leqslant 0$、$Q \geqslant 0$，则由它们所确定的凸多面体为$ABCDEF$，如图16-7 a 所示。

如果$P \geqslant 0$、$Q \leqslant 0$，则由它们所确定的凸多面体为$BCGH$，如图16-7 b 所示。

如果进一步分析图 16-7 a 、 b，容易得到如下的推论：

（1）当要确定最大值时，其可行域的顶点必定在“≤”的约束（超）平面上。因此，不必考虑全由“≥”所构成的交点，如图 16-7 a 中的E、F点可不必求出，因为它们不属于约束平面$P(\leqslant 0)$上。

（2）当要确定最小值时，其可行域的顶点必定在“≥”的约束（超）平面上。因此，不必考虑全由“≤”所构成的交点，如图16-7a中的A、D点可不必求出，因为它们不属于约束平面Q（≥0）上。

四、条件约束式中“=”的情况

当条件约束式中既有“=”又有“≥”、“≤”时，可行域顶点可根据上述各种情况的组合来确定。

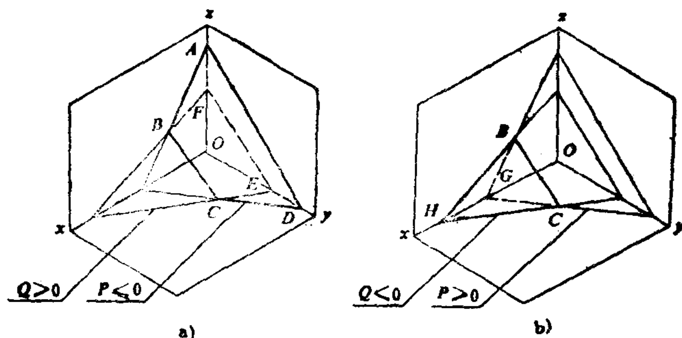


图16-7　可行域及其顶点位置判别的示意图（五）

第三节　应　用　实　例

例1　求$F=5x+3y+10z+2u$的最大值，并满足下列条件：

$$\begin{cases} x+4y+2z+u\leqslant 10 \\ 2x+y+3z+5u\leqslant 8 \\ x\geqslant 0;\quad y\geqslant 0;\quad z\geqslant 0;\quad u\geqslant 0 \end{cases}$$

解：

（1）作出约束超平面Λ、T。为了简化作图，将约束超平面方程改写成截距式：

$$\Lambda:\quad \frac{x}{10}+\frac{y}{5/2}+\frac{z}{5}+\frac{u}{10}=1$$

$$T:\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{z}{8/3}+\frac{u}{8/5}=1$$

作出的约束超平面Λ、T如图16-8所示。

（2）确定可行域顶点的位置。由上述判别原则可知：当变量数$n=4$、约束方程数$m=2$时，凸集中的顶点只能位于投影面和投影轴上。因此，这些顶点可利用迹线直接得到，具体分析如下：

超平面Λ、T的交平面与投影面的交点为A、B、C。从图16-8中可以看出，A、C不符合正向约束条件，因此，只有B点是可行域顶点。

求出超平面Λ、T与投影轴X、Y、Z、U的交点分别为E、F、G、H；I、J、K、L，由于两约束超平面均为“≤”，因此其中F、I、K、L为可行域的顶点。

综上所述，B、F、I、K、L为可行域顶点。

（3）根据$F=5x+3y+10z+2u$作出目标超平面Θ。

（4）过顶点B、F、I、K、L分别作超平面与目标超平面Θ平行（为了图面清晰，

没有全部作出)，并比较各超平面与原点的远近。此时，过顶点K所作的超平面Ω离原点（或目标超平面Θ）最远。因此，可求得最优解为顶点K，即$x_K=0$、$y_K=0$、$z_K=8/3$、$u_K=0$时为最优解、即

$$F_{max}=\frac{8}{3}\times 10=26\frac{2}{3}$$

如果用单纯形法解题，可得最优解为（0、0、8/3、0）^{T}，与图解结果相同。但是，用单纯形法进行解题是相当麻烦的。

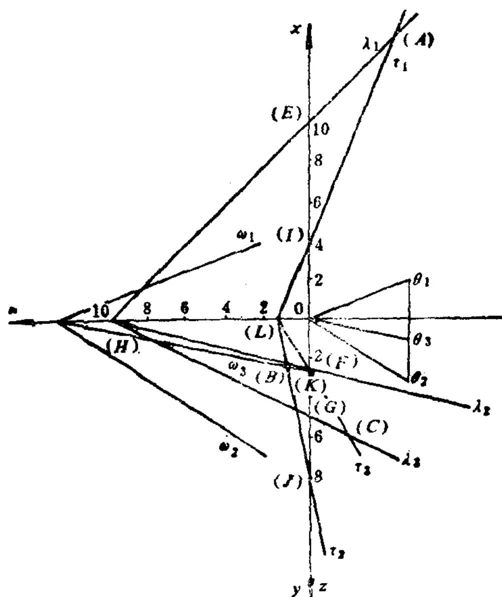


图16-8　应用举例

例2　求$F=20x-z+5u$的最大值，并满足下列条件：

$$\begin{cases} -2x+3y+2z+4u\geqslant 4 \\ 3x-2y+2z+2u\leqslant 13 \\ 2x+4y-z+3u=16 \\ x\geqslant 0;\quad y\geqslant 0;\quad z\geqslant 0;\quad u\geqslant 0 \end{cases}$$

解：

（1）作出约束超平面Λ、T、Ω。为了简化作图，将各约束超平面方程改写为截距式：

$$\Lambda:\quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{4/3}+\frac{z}{2}+u=1$$

$$T:\quad \frac{x}{13/3}+\frac{y}{-13/2}+\frac{z}{13/2}+\frac{u}{13/2}=1$$

$$\Omega:\quad \frac{x}{8}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-16}+\frac{u}{16/3}=1$$

作出的约束超平面Λ、T、Ω如图16-9所示。

（2）由上述判别原则可知：

当变量数$n=4$、约束条件方程数$n=3$时，可行域顶点只能位于投影空间、投影面或投影轴上。

由于条件约束式中有“=”的情况，因此可行域顶点应限于等式约束超平面Ω上。

由于本题要确定最大值，因此可行域顶点必需在“≤”的约束超平面T上。

综合以上情况，可行域顶点应是：

其一，约束超平面Ω与各投影轴的交点是A、B、C、D，如图16-9所示，但其中C点不符合正向约束条件。

其二，两约束超平面Ω、T的交平面与各投影面的交点，即Ω与T的各同名迹线的交点E、F、G，但其中点F不符合正向约束条件。

其三，三约束超平面Ω、T、Λ的交线l与各投影空间的交点为H、I、J、K。

根据以上分析可知，可行域顶点应是A、B、D、E、G、H、I、J、K。其中A、B、D、E、G可在图上直接作出，但要作出H、I、J、K，必须求出三约束超平面的交

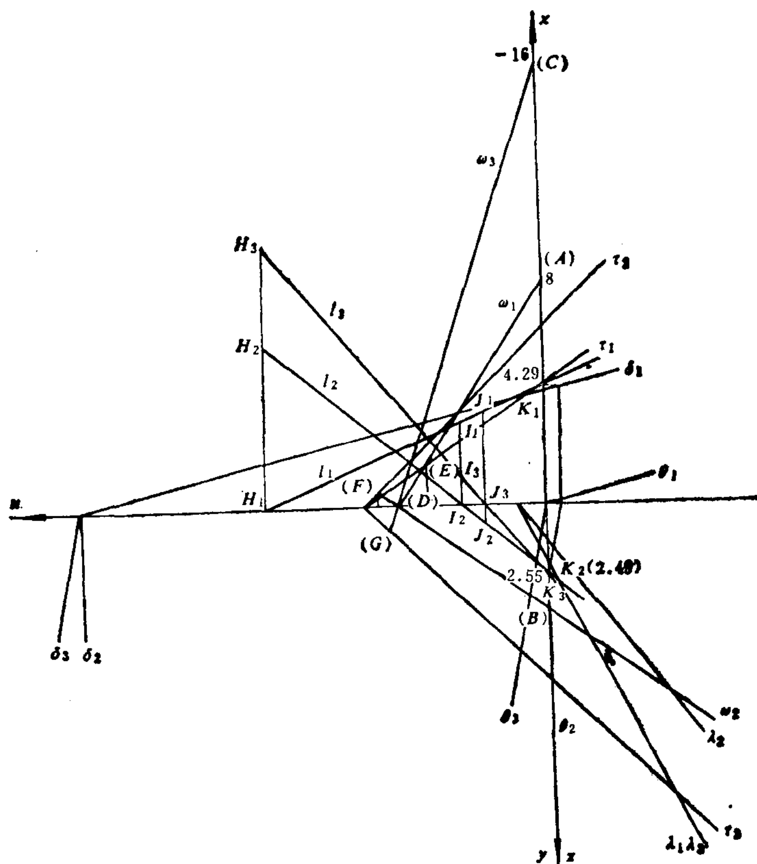


图16-9　应用举例

线。但是，在四维空间中三个超平面求交线 l 的作图过程是较麻烦的。如果用图解法求其交线 l，由于作图线较多，不但容易产生作图误差，而且影响图面的清晰。为此，可运用简单的数学运算解出其交线 l 的方程，并写出它的各投影的解析式，即

$$l_1:\ \frac{x}{4.29}+\frac{u}{9.96}=1$$

$$l_2:\ \frac{y}{2.49}+\frac{u}{3}=1$$

$$l_3:\ \frac{z}{2.55}+\frac{u}{2.16}=1$$

据此，先作它们的投影 l_1、l_2、l_3，再用图解法求出 l 与各投影空间的交点H、I、J、K。

（3）判别最优解：

根据$F=20x-z+5u$作目标函数超平面 Θ，并对各顶点进行判别，可得点K为最优解，即 $x_K=4.29$、$y_K=2.49$、$z_K=2.55$、$u_K=0$ 时为最优解，即

$$F_{max}=20\times4.29-2.55+5\times0=83.3$$

如果用单纯形法进行解题，可得最优解为$\left(\frac{279}{65}、\frac{162}{65}、\frac{166}{65}、0\right)^T$，即$F_{max}=\frac{5414}{65}=83.3$与图解结果一致。

参 考 文 献

〔1〕 C. E. S. 林德格伦，S. M. 斯拉比著，谢申鉴译，《四维画法几何学》，清华大学出版社，1981年12月。

〔2〕 D. M. Y. Sommerville, 《An Introduction To The Geometry of N Dimensions》, Methuen & co., Ltd, London. 1929.

〔3〕 H. P. Manning, 《Geometry of Four Dimensions》, Dover Publications Inc. 1956.

〔4〕 W. Lietzmann, 《Anschauliche Einführung In Die Mehrdimensionale Geometrie》, München, 1952.

〔5〕 D. W. Brisson, 《Hypergraphics》, Boulder, Colorado. Westview, 1978.

〔6〕 C. M. Куриков《Введение в Начертатерьную Геометрию Многомерных Пространств》, 1970.

〔7〕 P. H. Schoute, 《Mehrdimensionale Geometrie》Leipzig Göschen, 1902. 1905.

〔8〕 日本図学会編《図形科学ハンドブック》森北出版株式会社，1980.

〔9〕 E. A. 格拉祖诺夫、H. Φ. 切特维鲁新著，徐良佐、李汉卿译《轴测投影学》，高等教育出版社，1956。

〔10〕 Guan Yixiong, 《Central Projection of Four Dimensions》(Proceedings International Conference in Engineering and Computer graphics 1984).

〔11〕 Д. Н. Пастернак《вращение вокруг проскости гиперуровня в Четырехмерном Пространстве》(Прикрадная Геометрия и инженерная графика 1979).

〔12〕 L. Eckhart《Der Vierdimensionale Raum》, Leipzig, 1929.

〔13〕 S. A. Coons, 《N-Dimension Descriptive Geometry》, I. E. D, 1954 No. 2.

〔14〕 Э. И. 朴里亚尼什尼科娃，《E. C. 霍多罗夫投影的推广》(论文集：画法几何方法及其应用，高等教育出版社，1959)。

〔15〕 П. В. 费里波夫著，谢申鉴、周积义译《多维空间画法几何及其应用》，清华大学出版社，1983年12月。

〔16〕 П. В. Фимиппов, 《Графо-анаритическое Описание Гиперщара E^4 На Векторной Медери》(Прикрадная Геометрия и Инженерная Графика 1978).

〔17〕 朱辉、王继成，《多维星形坐标系图示法及其在多组元化学图中的应用》，中国工程图学学报 第4～5卷1983-84。

〔18〕 程祖衔，《光滑曲面设计中的"升维"法》，上海交通大学学报，1984. No. 6。

〔19〕 И. И. Котов, 《Новый метод построения Поверхностей удовретворяющих некоторым наперед заданным требованиям》, (Вопросы. Теории. Прироженйй и методики преподавания начератерьной геометрии, 1957).

〔20〕 В. П. Боротов, П. В. Фириппов, 《Применение методов начертатерьной геометрии многомерного пространства к Вопрооам Конструирования поверхностей》, (Прикрадная геометрия и инженерная графика, 1978).

〔21〕 Cheng Zuyan, 《The Model of Descriptire Geometry for the Optimization of Multiobjective Problem》(Proceedings International Conference on Engineering and Computer Graphics, 1984).

〔22〕 艾运钧等，《四维空间中互相垂直的两平面》，长沙铁道学院学报，1983 No. 2。

〔23〕 张士庆，《论四维空间两平面的夹角及图解方法》，阜新矿业学院学报，1985 No. 1。

[General Information]
书名=多维画法几何学
作者=朱辉　程祖衍
页数=181
SS号=10101501
DX号=
出版日期=1988年02月第1版
出版社=机械工业出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一篇 多维几何学导论
第一章 多维空间的基本知识
第一节 多维空间的直角坐标与子空间
第二节 多维图形
第三节 自由度与对偶性
第四节 四维空间的直角坐标体系与几何模型
第五节 四维空间中的各类几何元素
第二章 多维空间中几何元素的相对位置与度量问题
第一节 多维空间中的关联问题
第二节 多维空间中的垂直问题
第三节 多维空间中的平行问题

第四节 多维空间中的距离与角度
第三章 多维空间中的投影
第一节 多维空间中的中心投影与平行投影
第二节 四维空间中的轴测投影
第三节 四维空间中的正投影
第二篇 蒙日体系中的多维画法几何学
第四章 几何元素的图示法
第一节 四维空间中点的图示法
第二节 四维空间中直线的图示法
第三节 四维空间中平面的图示法
第四节 四维空间中超平面的图示法
第五节 高于四维空间中的几何元素图示法
第六节 四维点中心投影中的几何元素图示法
第七节 四维线中心投影的几

何元素图示法
第五章 四维空间中几何元素间的相对位置
第一节 相交问题
第二节 从属问题
第三节 平行问题
第四节 垂直问题
第五节 综合问题分析
第六章 投影空间的交换及其应用
第一节 基本概念和方法
第二节 直线的投影变换
第三节 平面的投影变换
第四节 超平面的投影变换
第五节 变换投影空间在度量问题中的应用
第七章 几何元素的旋转
第一节 几何元素绕直线旋转
第二节 几何元素绕平面旋转
第八章 曲线、曲面、超曲面
第一节 曲线
第二节 曲面
第三节 超曲面
第三篇 其他体系中的多维画法几何学

第九章 直角坐标体系中的四维画法几何学
第一节 几何元素的图示法
第二节 几何元素间的相对位置
第三节 投影变换
第四节 依卡哈脱方法
第十章 多层坐标面体系中的多维画法几何学
第一节 几何元素的图示法
第二节 几何元素间的相对位置
第三节 投影变换
第四节 孔斯方法
第十一章 平行向量体系中的四维画法几何学
第一节 几何元素的图示法
第二节 几何元素间的相对位置
第三节 费里波夫方法
第十二章 星形坐标体系中的多维画法几何学
第一节 星形坐标体系的建立

第二节 几何元素的图示法
第三节 几何元素间的相对位置
第四节 曲面、超曲面的图示法
第四篇 多维画法几何在科学技术方面的应用
第十三章 在物理、化学、冶金中的应用
第一节 确定类质同晶化合物的成分
第二节 线图及其在物理-化学分析等领域中的应用
第三节 在多元合金系统浓度图中的应用
第四节 在多元化学状态图中的应用
第十四章 在光滑曲面设计中的应用
第一节 基本概念与方法
第二节 应用实例
第十五章 在多目标优化问题中的应用

第一节 多目标响应(超)曲面的建立
第二节 搜索多目标优化值的原理和方法
第十六章 在线性规划问题中的应用
第一节 线性规划问题的基本概念和图解原理
第二节 可行域及其顶点位置的判别
第三节 应用实例
参考文献